Université Ibn Khaldoune Tiaret
Faculté Math & Informatique
Département de l'Informatique

Master GL 1 + RT 1 Module : Math Appliquées
Contrôle remplacement ***2021-2022 1h***

Exercice N° 1 :(12 pts) Soit la fonction f définie par : $f(x,y) = xy - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4$

1. Donnez le domaine de définition D de f ,
2. Calculer les dérivées premières
3. Trouvez les extrema et les points selles de la fonction f ,
4. La fonction f est -elle convexe ?

Exercice N° 2 : (8 pts) Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3x^2 - x + 5$.

Chercher la valeur de x qui minimise f en utilisant l'algorithme de descente de gradient. $x_0 = -5$ $\alpha = 0.2$ et comme critère d'arrêt **10 itérations**. Présentez les résultats sous forme de tableau.

Corrigé **Exercice N° 1 :**(12 pts)

Soit la fonction f définie par : $f(x,y) = xy - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4$

1. Domaine de définition : $D_f = R^2$
2. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y - x^3$ $\quad\quad$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x - y^3$
3. Ces deux fonctions sont définies dans R^2. Nous cherchons alors à résoudre :
$$\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = (x^3)^3 = x^9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x - x^9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^8 - 1) = 0 \end{cases}$$
La dernière équation nous donne comme valeur possible pour x , $x = 0$
et les racines huitièmes de l'unité. Or nous ne cherchons que des racines réelles donc les valeurs possibles de x sont $x = 0, x = 1$ *et* $x = -1$x = 0, x = 1 et x = −1.
Cela donne comme solutions réelles du système (0; 0), (1; 1) et (−1;−1).
D'autre part, nous avons comme hessien de f :
$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -3x^2 & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 1 \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 1 & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -3y^2 \end{pmatrix}$$
On obtient alors :

- En **(−1;−1),** $H_f(-1,-1)=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et le déterminant de $H_f(-1,-1)$

$\det(H_f(-1,-1))=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=9-1=8>0$ et $\dfrac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial x^2}=-3<0$

donc $((-1,-1), f(-1,-1))$ ***est un maximum local.***

- En **(0;0),** $H_f(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le déterminant de $H_f(0,0)$

  $\det(H_f(0,0))=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-1=-1<0$ et $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}=0$

donc $((0,0), f(0,0))$ ***est un point de selle.***

- En **(1;1),** $H_f(1,1)=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et le déterminant de $H_f(1,1)$

  $\det(H_f(1,1))=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=9-1=8>0$ et $\dfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2}=-3<0$

donc $((1,1), f(1,1))$ ***est un maximum local.***

Puisque la fonction f a plusieurs extrema alors elle n'est pas convexe sur le domaine $D_f = R^2$

<u>Exercice N° 2</u> : (8 pts) Soit la fonction f définie par : $f(x)=3x^2-x+5$

Chercher la valeur de x qui minimise f en utilisant l'algorithme de descente de gradient.
$x_0=-5$ $\alpha=0.2$ et comme critère d'arrêt **10 itérations**.

La solution au bout de **10** itérations :

$x = 1.667 \quad \nabla f(x) = -0.0000 \qquad f(x) = 4.9167$