Optimisation

En toute généralité, les conditions de Kuhn-Tucker sont des conditions ***nécessaires,*** autrement dit, si on est en un point optimum, elles sont toujours réalisées. Mais elles ne sont pas forcément ***suffisantes*** : autrement dit, ce n'est pas parce qu'elles sont réalisées en un point (x, λ) que ce point est obligatoirement un optimum. Néanmoins, il existe des situations où on peut affirmer qu'elles sont effectivement suffisantes : c'est le cas en particulier lorsque la fonction ***f*** est ***concave*** et les fonctions $\boldsymbol{g_j}$ ***sont convexes***. C'est pourquoi on s'intéresse à l'optimisation convexe.

En résumé, dans le cas où ***f*** est concave et les $\boldsymbol{g_j}$ sont convexes, les conditions de Kuhn-Tucker sont des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Dans cette situation, un point est optimal si et seulement si les conditions sont toutes réalisées. Si jamais une seule des conditions n'était pas réalisée, le point ne pourrait pas être une solution optimale du problème.

Noter que dans le cas d'une minimisation, la condition suffisante ci-dessus est inversée : la fonction ***f*** est convexe et les fonctions $\boldsymbol{g_j}$ sont concaves.

Dans le cas de la programmation linéaire, ces conditions sont réalisées car une fonction linéaire est à la fois convexe et concave.

Ecriture avec des variables d'écart

Si on introduit des variables d'écart ***x'*** dans les contraintes, l'écriture des conditions de Kuhn-Tucker est modifiée. Les contraintes s'écrivent : $g(x) + x' = b$ et le lagrangien est défini de la manière suivante :

$$L(x, x', \lambda) = f(x) - \lambda.(g(x) + x' - b)$$

C'est une fonction des x, x', λ.

Dans ce cas, les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent comme ceci :

$$x_i \geq 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} \geq 0 \qquad x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$x_j^{'} \geq 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_j^{'}} \geq 0 \qquad x_j^{'} \frac{\partial L}{\partial x_j^{'}} = 0$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \geq 0 \qquad \lambda_j \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$$

Exemple 1 :

(3), nous donne $x_1 = -2$ (4), nous donne $x_1 = 1$ (5), nous donne $x_1 = 10$ (6), nous donne $x_1 = 4$

La plus grande valeur que peut prendre x_1 est 10 , cependant cette valeur ne vérifie pas toutes les contraintes et donc n'appartient pas à l'ensemble réalisable. Elles ne peut être solution de notre problème.

Celle qui vient après est $x_1 = 4$, elle vérifie toutes les contraintes. Donc c'est la solution de notre problème d'optimisation. Pour cette valeur $x_1 = 4$ et , calculons les valeurs des λ_j

(3), nous donne $(x_1 - x_2 + 2) = 6$ donc $\lambda_1 = 0$;

(4), nous donne $(2x_1 + x_2 - 2) = 6$ donc $\lambda_2 = 0$;

(5), nous donne $(x_1 + 2x_2 - 10) = -8$ donc $\lambda_3 = 0$;

(6), nous donne $(7x_1 + 2x_2 - 28) = 0$ donc $\lambda_4 \neq 0$; d'où d'après (1) $\lambda_4 = \frac{48}{7}$

$(x^*, \lambda^*) = (x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \left(4,0,0,0,0,\frac{48}{7}\right)$ est l'optimum de notre problème et on peut vérifier qu'il remplit toutes les conditions de Kuhn-Tucker. $f(x^*) = 48$

Exemple 2 : Conditions de Kuhn-Tucker

On considère une économie à deux biens : un bien de consommation et le travail. L'indice 1 désigne le bien de consommation, dont le prix est p_1, tandis que l'indice 2 désigne le travail, de prix p_2 (salaire).

Les préférences d'un agent économique, dont la seule ressource est la force de travail, sont représentables par une fonction d'utilité : $U(x_1, x_2) = 2\ln(x_1) + \ln(3 - x_2)$

On suppose qu'il existe un minimum vital de consommation $x_1 \geq 1$ et un plafond de travail que l'agent économique ne peut pas dépasser $x_2 \leq 3$. On veut déterminer la fonction de demande du bien de consommation et la fonction d'offre du travail.

Formuler le programme de maximisation, donner une représentation géométrique du problème et le résoudre au moyen des conditions de Kuhn-Tucker. La solution est elle unique ? Pourquoi ?

Solution : Il faut maximiser la fonction d'utilité $U(x_1, x_2) = 2\ln(x_1) + \ln(3 - x_2)$

Les conditions imposées s'écrivent sous la forme de contraintes inégalité : $x_1 \geq 1$ et $x_2 \leq 3$.

Il faut d'autre part tenir compte des prix p_1 et p_2 et écrire que $P_1 x_1 \geq P_2 x_2$

Finalement le programme d'optimisation s'écrit :

$$\begin{cases} Max \quad 2\ln(x_1) + \ln(3 - x_2) \\ x_1 \ \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ P_1 x_1 - P_2 x_2 \ \geq 0 \\ x_1, x_2 \ \geq 0 \end{cases}$$

Le lagrangien s'écrit de la manière suivante :

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 2\ln(-\lambda_1 x_1 x_1) + \ln(3 - x_2) - \lambda_1(-x_1 + 1) - \lambda_2(x_2 - 3) - \lambda_3(P_1 x_1 - P_2 x_2)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker sont les suivantes. Il y a tout d'abord les conditions de signe sur les variables :

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

Il faut ensuite calculer les dérivées partielles par rapport à ces variables et poser les conditions de signe correspondantes. Dans le cas des dérivées par rapport aux coefficients λ, on retrouve les contraintes :

$$\frac{2}{x_1} + \lambda_1 - \lambda_3 P_1 \leq 0$$

$$\frac{-1}{3 - x_2} - \lambda_2 + \lambda_3 P_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$P_1 x_1 - P_2 x_2 \geq 0$$

Il y a enfin les relations d'exclusion :

$$x_1\left(\frac{2}{x_1} + \lambda_1 - \lambda_3 P_1\right) = 0$$

$$x_2\left(\frac{-1}{3 - x_2} - \lambda_2 + \lambda_3 P_2\right) = 0$$

$$\lambda_1(x_1 - 1) = 0$$

$$\lambda_2(x_2 - 3) = 0$$

$$\lambda_3(P_1 x_1 - P_2 x_2) = 0$$

On remarque que, puisqu'on a la condition $x_1 \geq 1$, on peut exclure le cas où $x_1 = 0$.
La première relation d'exclusion impose donc :

$$\left(\frac{2}{x_1} + \lambda_1 - \lambda_3 P_1\right) = 0$$

Par conséquent x_2 ne peut pas non plus être nulle d'après la troisième contrainte.
La deuxième relation d'exclusion impose donc :

$$\frac{-1}{3 - x_2} - \lambda_2 + \lambda_3 P_2 = 0$$

D'autre part, il n'est pas possible que $x_2 = 3$ car sinon la fonction objectif ne serait pas définie (à cause du logarithme). La quatrième relation d'exclusion impose donc que $\lambda_2 = 0$.

Montrons maintenant que λ_3 ne peut pas être nul. S'il l'était, on aurait : $\frac{-1}{3 - x_2} = \lambda_2$

ce qui n'est pas possible car le membre de droite est négatif et que λ_2 doit être positif.

Puisque $\lambda_3 \neq 0$, la dernière relation d'exclusion conduit à la relation $P_1 x_1 = P_2 x_2$ qui indique que l'agent économique travail juste pour satisfaire son besoin de bien de consommation. Il dépense tout ce qu'il gagne.

La discussion se fait maintenant sur la troisième relation d'exclusion qui n'a pas encore été utilisée. Il faut distinguer deux cas :

ou bien $x_1 = 1$, ou bien $x_2 = 0$.

Dans le cas $x_1 = 1$, les équations conduisent facilement à $x_2 = P_1 = P_2$.
Dans le cas où $\lambda_2 = 0$, on obtient la solution $x_1 = 2P_1 = P_2 \; et \; x_2 = 2$.

Il faut ensuite vérifier que les conditions de signe de Kuhn-Tucker sont toutes vérifiées, ce qui impose des conditions sur $P_1 \, et \; P_2$.
On trouve trois possibilités :

$$\begin{cases} P_1 < P_2 \;\Rightarrow\; x_1 = 2P_1 = P_2 \; et \; x_2 = 2 \\ 2P_2 \le P_1 \le 3P_2 \;\Rightarrow\; x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = P_1 / P_2 \\ P_1 > 3P_2 \;\Rightarrow\; \text{pas de solution} \end{cases}$$

Exemple 3 : On considère le programme quadratique suivant :

$$\begin{cases} Min \quad \left(3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 22x_1 - 14x_2\right) \\ -x_1 + 3x_2 \le 1 \\ -3x_1 + 7x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Le problème est une minimisation. On se ramène à un programme de maximisation en changeant le signe de la fonction objectif :

$$Max \quad \left(-3x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 22x_1 + 14x_2\right)$$

1) Le lagrangien est définie comme suit :

$$L(x,\lambda) = \left(-3x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 22x_1 + 14x_2\right) - \lambda_1\left(-x_1 + 3x_2 - 1\right) - \lambda_2\left(-3x_1 + 7x_2\right) - \lambda_3\left(x_1 - x_2 - 4\right)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent :

$$\begin{aligned} & x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0 \\ & -6x_1 + 2x_2 + 22 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 \le 0 \\ & -6x_2 + 2x_1 + 14 - 3\lambda_1 - 7\lambda_2 + \lambda_3 \le 0 \\ & -x_1 + 3x_2 \le 1 \\ & -3x_1 + 7x_2 \le 0 \\ & x_1 - x_2 \le 4 \end{aligned}$$

Il y a aussi les relations d'exclusion :

$$\begin{aligned} & x_1\left(-6x_1 + 2x_2 + 22 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3\right) = 0 \\ & x_2\left(-6x_2 + 2x_1 + 14 - 3\lambda_1 - 7\lambda_2 + \lambda_3\right) = 0 \\ & \lambda_1\left(-x_1 + 3x_2 - 1\right) = 0 \\ & \lambda_2\left(-3x_1 + 7x_2\right) = 0 \\ & \lambda_3\left(x_1 - x_2 - 4\right) = 0 \end{aligned}$$

de ces 3 dernières, on commence notre discussion :

(