**Université Ibn Khaldoune Tiaret** **Master GL 1 + RT 1 Module : Math Appliquées**

**Faculté Math & Informatique**

**Département de l'Informatique**

# Dérivées partielles

## Exercices corrigés

## Exercice N° 1 :

Soit la fonction :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 3x_3x_4 + 2x_1x_3 + 3x_2x_4 + x_1 + 3x_3$$

Calculer les dérivées partielles de $f$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\frac{\partial f}{\partial x_4}$, $\frac{\partial f}{\partial x_4 \partial x_1}$.

*Réponse* :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 10x_2 + 2x_1 + 3x_4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 + 3x_4 + 2x_1 + 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_4} = 6x_4 + 3x_3 + 3x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4 \partial x_2} = \frac{\partial f\left(10x_2 + 2x_1 + 3x_4\right)}{\partial x_4} = 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_4} = \frac{\partial f\left(6x_4 + 3x_3 + 3x_2\right)}{\partial x_2} = 6$$

$a$) Soit la fonction : $f(x, y) = e^{(2x+3)} \sin\left(xy^2\right)$

Calculer les dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Réponse :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{(2x+3)}\sin\left(xy^2\right) + e^{(2x+3)}\cos\left(xy^2\right)y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(2e^{(2x+3)}\sin\left(xy^2\right) + e^{(2x+3)}\cos\left(xy^2\right)y^2\right)}{\partial y}$$

$$= e^{(2x+3)}\left[2\cos\left(xy^2\right)\times 2yx + 2y\cos\left(xy^2\right) + y^2\left(-\sin\left(xy^2\right)\times 2yx\right)\right]$$

$$= e^{(2x+3)}\left[2y(2x+1)\cos\left(xy^2\right) + 2xy^3\left(-\sin\left(xy^2\right)\right)\right]$$

$b)$ Soit la fonction : $f(x,y) = -x^3y + \cos\left(y^3 - x^2\right)$

Calculer les dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Réponse : $\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2y + 2x\sin\left(y^3 - x^2\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(-3x^2y + 2x\sin\left(y^3 - x^2\right)\right)}{\partial y}$$

$$= -3x^2 + 6xy^2\cos\left(y^3 - x^2\right)$$

## Exercice N° 2 :

Soit la fonction : $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^4 - x^2\left(y - x^2\right) - 2x^3}{x^2 - y^2} & si \quad x^2 - y^2 \neq 0 \\ 0 & si \quad x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

$si \quad x^2 - y^2 \neq 0$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g, $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$, si elles existent, au point $(0,0)$.

Réponse:

La fonction est définie par une formule différente selon que l'on est au point $(0,0)$ ou au voisinage de ce point.

Nous allons donc utiliser la définition théorique de la dérivée partielle en $(0,0)$:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\mathrm{g}(0+\mathrm{h},0)-\mathrm{g}(0,0)}{\mathrm{h}}$$

il faut calculer $g(h,0)$. Pour $h \neq 0$ on a $\mathrm{h}^2 - 0^2 \neq 0$, donc il faut utiliser la première ligne de la définition de $g$.

$$\mathrm{g}(\mathrm{h},0) = \frac{3(0)^4 - h^2\left(0-h^2\right)-2h^3}{h^2-0^2}$$

$$= \frac{h^4-2h^3}{h^2} = h^2 - 2h.$$

d'où $\dfrac{\mathrm{g}(\mathrm{h},0)-g(0,0)}{h} = \dfrac{h^2 2h - 0}{h} = h-2$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|(0,0) = \lim_{h\to 0}(h-2) = -2.$$

de même, on calcule

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{k\to 0} \frac{g(0,0+k)-g(0,0)}{k}$$

pour $k \neq 0$, on a $0^2 - \mathrm{k}^2 \neq 0$, donc $\quad g(0,k) = \dfrac{3\mathrm{k}^4 - 0^2\left(k-0^2\right)-2(0)^3}{0^2-k^2} = -3\mathrm{k}^2$

Donc, $\left.\dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{y}}\right|(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{-3k^2-0}{k} = \lim\limits_{k\to 0}(-3k) = 0.$