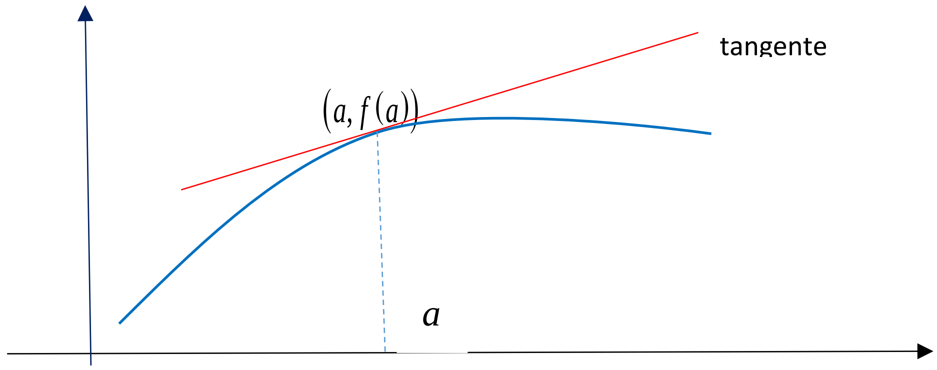
Université Ibn Khaldoune Tiaret
Faculté Math & Informatique
Département de l'Informatique

Master GL 1 + RT 1 Module : Math Appliquées

Approximation linéaire

Exercices corrigés

L'approximation linéaire : il est parfois très difficile de calculer la valeur exacte d'une fonction en un point donné, par exemple calculer la valeur exacte de $\sqrt{16{,}7}$ ou de $\log(28{,}35)$…. Alors, ce que l'on fait c'est donner une valeur approchée.



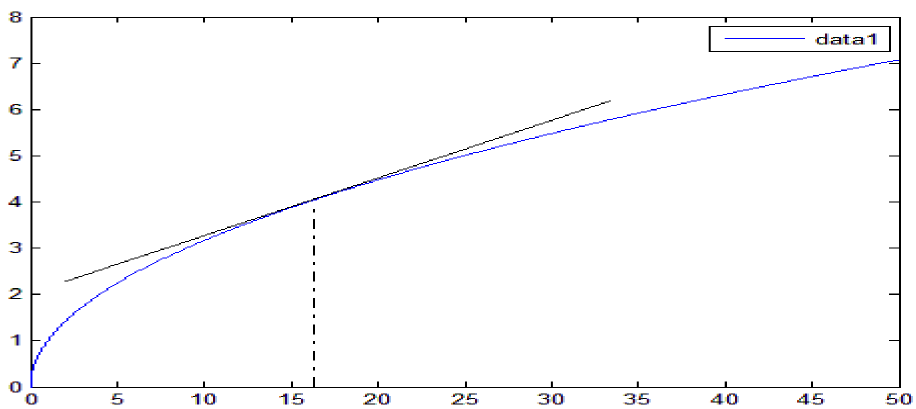
La droite tangente au point $(a, f(a))$ permet d'approcher la fonction f dans un voisinage de a .

Exercice N° 1 :

Calculer l'*approximation* linéaire de $f(x) = \sqrt{x}$ au point $x = \sqrt{16{,}37}$.

La formule de l'approximation linéaire est : $f(x_0 + h) \approx f'(x_0)h + f(x_0)$.

$$f(x) = \sqrt{x}$$



1° Trouvons un point vosin de 16,37 dont on peut calculer facilement la racine carrée.

Prenons $x_0 = 16$, $h = 0{,}37$

2° $\sqrt{16,37} = \sqrt{16+0,37} = f^{'}(16)\times 0,37 + f(16).$

3° $f^{'}(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{'} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f^{'}(16) = \left(\sqrt{16}\right)^{'} = \dfrac{1}{2\sqrt{16}} = \dfrac{1}{2\times 4} = \dfrac{1}{8}$

4° d'où $\sqrt{16,37} =^{'} (16)\times 0,37 + f(16) ==^{'} \left(\dfrac{1}{8}\right)\times 0,37 + 4 = 4,0463.$

5° Quelle est l'erreur commise ? Si nous calculons à l'aide de Matlab $\sqrt{16,37}$ on trouve : 4,0460.
l'erreur est donc $|4,0460 - 4,0463| = 0.0003.$

Exercice N° 2 :

Calculer l'*approximation* linéaire de $f(x) = \log(x)$ *au point* $x = 55,5.$

La formule de l'approximation linéaire est : $f(x_0 + h) \approx f^{'}(x_0)h + f(x_0).$

1° Trouvons un point vosin de 55,5 dont on peut calculer facilement le logarithme.
Prenons $x_0 = 55,\quad h = 0,5$

2° $\log(55,5) = \log(55 + 0,5) = f^{'}(55)\times 0,5 + f(55).$

3° $f^{'}(x) = (\log(x))^{'} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f^{'}(55) = (\log(55))^{'} = \dfrac{1}{55} = 0,0182$

4° d'où $l\log(55,5) =^{'} 0,00182\times 0,5 + Log(55) ==^{'} 0,0182\times 0,5 + 4.0073 = 4,0164.$
5° Quelle est l'erreur commise ? Si nous calculons à l'aide de Matlab $l\log(55,5)$ on trouve : 4,0164.
l'erreur est donc $|4,0164 - 4,0164| = 0.$