Chapitre V : Mouvement relatif

1) **Composition des mouvements** (mouvement relatif) Considérons :

- un repère S, matérialisé par un trièdre Oxyz
- un repère S_1, matérialisé par un trièdre $O_1x_1y_1z_1$ en mouvement par rapport à S
- un point M, en mouvement, défini par x,y,z dans le repère S et par x_1, y_1, z_1 dans le repère S_1

Par changement de coordonnées on peut passer du mouvement de M par rapport à S_1 au mouvement de M par rapport à S.

Il suffit d'appliquer la relation vectorielle : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$

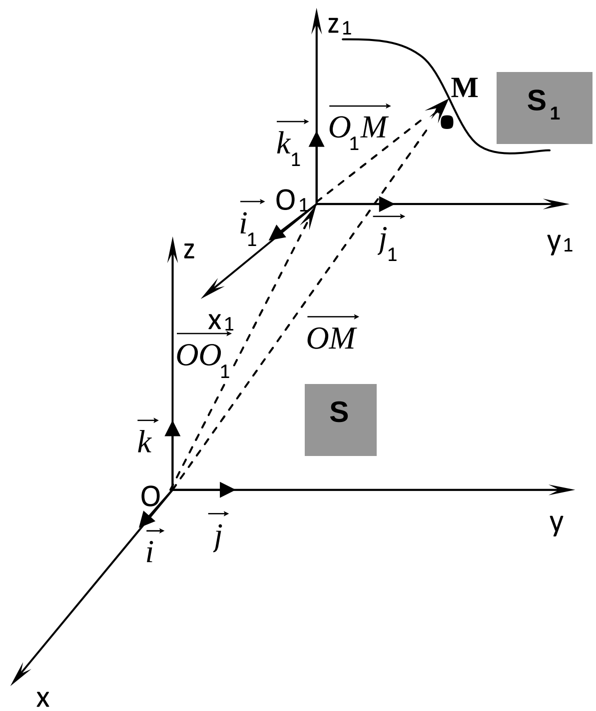
Pour étudier un mouvement bien défini, on utilise les définitions suivantes :

🖉 le trièdre Oxyz (repère S) est le ***repère absolu*** ou ***référentiel absolu*** ; le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ (repère S_1) est le ***repère relatif*** ou ***référentiel relatif*** ;

🖉 le mouvement du point M par rapport à « S » s'appelle ***mouvement absolu*** *;*

🖉 le mouvement du point M par rapport à « S_1 » s'appelle ***mouvement relatif*** *;*

🖉 le mouvement de « S_1 » par rapport à « S » s'appelle ***mouvement d'entraînement*** *;*



2) Compositions des vitesses

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$

$\overrightarrow{v_a}$: vitesse absolue

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}$$

Or $\quad \overrightarrow{O_1M} = x_1\overrightarrow{i_1} + y_1\overrightarrow{j_1} + z_1\overrightarrow{k_1}$ dans le repère S_1

Il vient :

$$\overrightarrow{v_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + x_1\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt} + y_1\frac{d\overrightarrow{j_1}}{dt} + z_1\frac{d\overrightarrow{k_1}}{dt}}_{\overrightarrow{\mathbf{v_e}}} + \underbrace{\frac{dx_1}{dt}\overrightarrow{i_1} + \frac{dy_1}{dt}\overrightarrow{j_1} + \frac{dz_1}{dt}\overrightarrow{k_1}}_{\overrightarrow{\mathbf{v_r}}}$$

Donc : $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$

Avec :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + x_1\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt} + y_1\frac{d\overrightarrow{j_1}}{dt} + z_1\frac{d\overrightarrow{k_1}}{dt}$$

$$\vec{v_r} = \frac{dx_1}{dt}\vec{\imath_1} + \frac{dy_1}{dt}\vec{\jmath_1} + \frac{dz_1}{dt}\vec{k_1}$$

Cas particulier :

- Si S et S1 sont fixes alors : $\vec{v_e} = \vec{0}$, $\vec{v_a} = \vec{v_r}$

Si S est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à S on a : $\vec{v_e} = \frac{\overrightarrow{dOO_1}}{dt}$

<u>Remarque :</u>

Si ($\vec{u}, \vec{u_1}$) est une base tournante on a :

$$\frac{\overrightarrow{du}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

Avec $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ où ω est la vitesse angulaire.

De ce fait, la vitesse d'entrainement s'écrira alors :

$$\vec{v_e} = \frac{\overrightarrow{dOO_1}}{dt} + \underbrace{x_1(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath_1}) + y_1(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath_1}) + z_1(\vec{\omega}\wedge\vec{k_1})}_{\vec{\omega}\wedge(x_1\vec{\imath_1} + y_1\vec{\jmath_1} + z_1\vec{k_1})}$$

$$\vec{v_e} = \frac{\overrightarrow{dOO_1}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}$$

3) Compositions des accélérations

$$\vec{\gamma_a} = \frac{\overrightarrow{dv_a}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dv_e}}{dt} + \frac{\overrightarrow{dv_r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{dOO_1}}{dt} + x_1\frac{d\vec{\imath_1}}{dt} + y_1\frac{d\vec{\jmath_1}}{dt} + z_1\frac{d\vec{k_1}}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{\imath_1} + \frac{dy_1}{dt}\vec{\jmath_1} + \frac{dz_1}{dt}\vec{k_1}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma_a} = \frac{\overrightarrow{d^2OO_1}}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{\imath_1}}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{\jmath_1}}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k_1}}{dt} + x_1\frac{\overrightarrow{d^2\imath_1}}{dt^2} + y_1\frac{\overrightarrow{d^2\jmath_1}}{dt^2} + z_1\frac{\overrightarrow{d^2k_1}}{dt^2} + \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{\imath_1} + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{\jmath_1} + \frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{\imath_1}}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{\jmath_1}}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k_1}}{dt}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma_a} = \underbrace{\left(\frac{\overrightarrow{d^2OO_1}}{dt^2} + x_1\frac{\overrightarrow{d^2\imath_1}}{dt^2} + y_1\frac{\overrightarrow{d^2\jmath_1}}{dt^2} + z_1\frac{\overrightarrow{d^2k_1}}{dt^2}\right)}_{\overrightarrow{\gamma_e}} + \underbrace{\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\overrightarrow{\imath_1} + \frac{d^2z_1}{dt^2}\overrightarrow{k_1}\frac{d^2y_1}{dt^2}\overrightarrow{\jmath_1}\right)}_{\overrightarrow{\gamma_r}} +$$

$$+2.\underbrace{\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\overrightarrow{\imath_1}}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\overrightarrow{\jmath_1}}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\overrightarrow{k_1}}{dt}\right)}_{\overrightarrow{\gamma_c}}$$

Avec

:

$\overrightarrow{\gamma_e}$: accélération d'entrainement

$\overrightarrow{\gamma_r}$: accélération relative

$\overrightarrow{\gamma_c}$: accélération complémentaire ou accélération de Coriolis

Remarque :

Si on utilise la relation

$$\frac{\overrightarrow{du}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_1} = \vec{\omega}\wedge\vec{u}$$

L'accélération de Coriolis devient :

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2.\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\overrightarrow{\imath_1}}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\overrightarrow{\jmath_1}}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\overrightarrow{k_1}}{dt}\right)$$

$$= 2.\left(\frac{dx_1}{dt}(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\imath_1}) + \frac{dy_1}{dt}(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\jmath_1}) + \frac{dz_1}{dt}(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{k_1})\right)$$

$$= 2.\left((\vec{\omega}\wedge\frac{dx_1}{dt}\overrightarrow{\imath_1}) + (\vec{\omega}\wedge\frac{dy_1}{dt}\overrightarrow{\jmath_1}) + (\vec{\omega}\wedge\frac{dz_1}{dt}\overrightarrow{k_1})\right)$$

$$= 2.\left(\vec{\omega}\wedge\left(\frac{dx_1}{dt}\overrightarrow{\imath_1} + \frac{dy_1}{dt}\overrightarrow{\jmath_1} + \frac{dz_1}{dt}\overrightarrow{k_1}\right)\right)$$

$$= 2.\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r}$$

Et l'accélération de d'entrainement devient :

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{\overrightarrow{d^2OO_1}}{dt^2} + x_1\frac{\overrightarrow{d^2i_1}}{dt^2} + y_1\frac{\overrightarrow{d^2j_1}}{dt^2} + z_1\frac{\overrightarrow{d^2k_1}}{dt^2}$$

$$= \frac{\overrightarrow{d^2OO_1}}{dt^2} + x_1\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\imath_1}) + y_1\frac{d}{dt} + z_1\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{k_1})$$

$$= \frac{\overrightarrow{d^2OO_1}}{dt^2} + x_1\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{\imath_1} + x_1\vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{\imath_1}}{dt} + y_1\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{\jmath_1} + y_1\vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{\jmath_1}}{dt}y_1 + z_1\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{k_1} + z_1\vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{k_1}}{dt}$$

$$= \frac{\overrightarrow{d^2OO_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge x_1\overrightarrow{\imath_1} + x_1\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\imath_1}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge y_1\overrightarrow{\jmath_1} + y_1\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\jmath_1}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge z_1\overrightarrow{k_1} + z_1\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{k_1})$$

$$= \frac{\overrightarrow{d^2OO_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\left(x_1\overrightarrow{\imath_1} + y_1\overrightarrow{\jmath_1} + z_1\overrightarrow{k_1}\right) + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge x_1\overrightarrow{\imath_1}) + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge y_1\overrightarrow{\jmath_1}) + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge z_1\overrightarrow{k_1})$$

$$= \frac{\overrightarrow{d^2OO_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge x_1\overrightarrow{\imath_1} + y_1\overrightarrow{\jmath_1} + z_1\overrightarrow{k_1})$$

$$= \frac{\overrightarrow{d^2OO_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_1M})$$