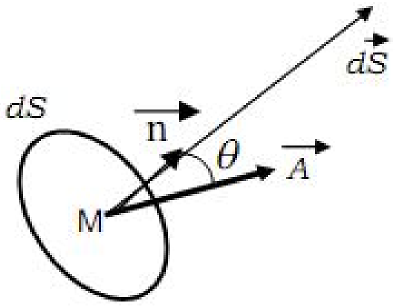
4. Flux du champ électrique: Théorème de Gauss

4.1. Représentation d'une surface

Une surface S réelle ou fictive peut être considérée comme constituée d'un grand nombre de surfaces élémentaires dS très petits,



Chaque élément dS est représenté par un vecteur $\overrightarrow{dS}$, On considère un vecteur unitaire $\vec{n}$, porté par la normale à dS et on représente cet élément de surface par un vecteur :

$$\overrightarrow{dS} = dS.\vec{n}$$

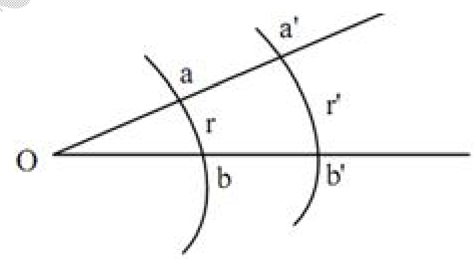
- ❖ Appliqué sur dS
- ❖ de grandeur dS
- ❖ dirigé selon la normale au plan dS
- ❖ sur une direction arbitraire qui sera conservée pour tous les éléments de S.

Ainsi :

$$s = \iint |ds|$$

4.2. Angle solide

❖ Angle dans le plan



$\widehat{ab}$: Longueur de l'arc,

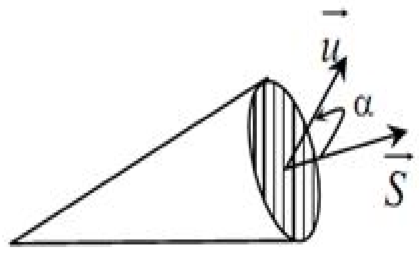
$\alpha = \frac{\widehat{ab}}{r} = \frac{\widehat{a'b'}}{r'}$ est indépendant de r,

$au\ maximum :\ \alpha = \dfrac{2\pi\, r}{r} = 2\pi$

$[\alpha]$: radian : rad

❖ Angle solide

Par analogie avec ce qui précède, on définit l'angle solide Ω comme ayant pour mesure la surface S interprétée sur la sphère de rayon unité.



[Ω] = stéradian : st

$$\Omega = \frac{\vec{S}\,\vec{u}}{r^2} = \frac{S\cos\alpha}{r^2}$$

Par une surface d'orientation normale :

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (\alpha = 0)$$

Cette définition conduit au résultat suivant :

- Pour tout l'espace :

$$\Omega = \frac{s}{r^2} = \frac{4\,\pi\,r^2}{r^2} = 4\pi$$

- Une calotte sphérique de centre O de rayon r a une surface telle que :

$$s = \Omega r^2$$

- Si l'angle solide est petit :

$$ds = d\Omega r^2$$

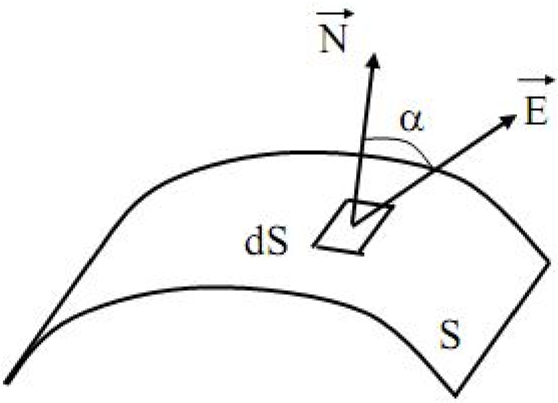
- Soit d∑ une surface s'appuyant, autour de M, sur le même angle solide dΩ, et dont le plan fait un angle θ avec celui de dS, on a

$$dS = d\sum\cos\theta$$

$$\Rightarrow d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

$$= \frac{d\sum\cos\theta}{r^2}$$

4. 3. Flux du vecteur champ électrostatique



- On appelle flux de $\vec{E}$ à travers dS, élément de S, la quantité scalaire positive ou négative :

$$d\Phi = \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dS}$$

Le flux total de $\vec{E}$ à travers S est l'intégrale sur toute la surface :

$$\Phi = \iint_S d\,\vec{\Phi} = \iint_S \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dS}$$

Remarque

Dans le cas général, $\vec{E}$ varie d'une surface élémentaire à l'autre.

4. 4. Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss s'énonce comme suit:

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée entourant des charges q_i est :

$$\Phi = \iint_S \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dS} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

$\sum q_i$: représente la somme algébrique des charges intérieures.

4. 4. 1. Applications du théorème de Gauss

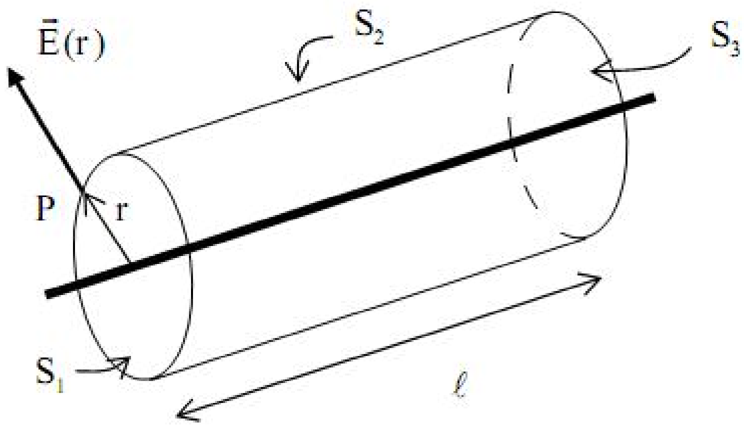
Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et sa source, à savoir les charges électriques.

Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ E lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières. Celles-ci doivent en effet permettre de calculer facilement le fluxΦ. Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface S de Gauss adaptée, c'est-à-dire respectant les propriétés de symétrie du champ. Le théorème de Gauss permet, dans certains cas, de calculer, à partir des charges sources, le champ électrique. La méthode est alors plus simple que celle du calcul direct.

4.4.2 Exemple d'application a quelques distributions

a- Champ électrique produit par un barreau rectiligne infini uniformément chargé

Soit λ la densité linéique de charge du barreau, mesurée en C/m. Pour de raisons de symétrie le champ électrique doit être purement radial, c'est-à-dire être perpendiculaire en tout point de l'espace à l'axe du barreau. Son module ne dépend que de la distance r à l'axe du barreau. Considérons un cylindre de rayon r et de longueur l dont l'axe de symétrie coïncide avec l'axe du barreau.



Cylindre entourant une section du barreau de longueur l.

Appliquons le théorème de Gauss à ce cylindre. La somme des charges entourées est simplement le produit de la densité linéique par la longueur du barreau, soit λl .

$$\text{Donc : } \oiint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

La surface S se décompose en 3 surfaces S_1 , S_2 et S_3 .

$\oiint_{S1} \vec{E}\overrightarrow{dS} = 0$ car la normale à la base du cylindre S , est perpendiculaire à $\vec{E}$.

Sur la surface latérale S_2 $\vec{E}(r)$ est constant et parallèle a $\overrightarrow{dS}$. On peut décrire :

$$\oiint_{S_2} \vec{E}(r)\,\overrightarrow{dS} = \oiint_{S_2} E(r)\,dS = E(r)\oiint_{S_2} dS = E(r)2\pi r l$$

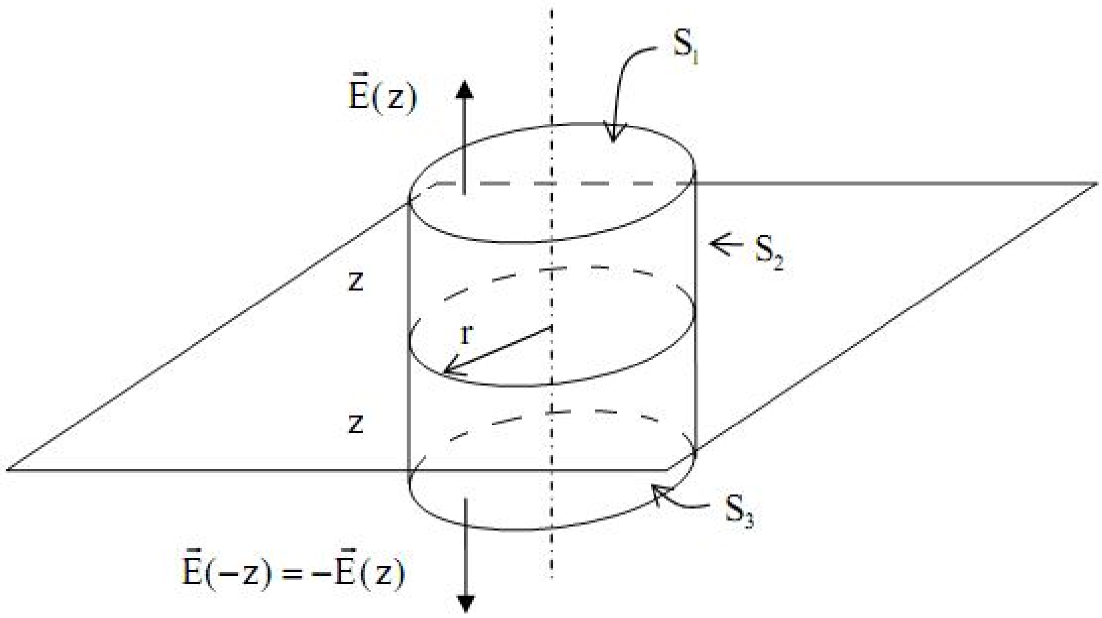
Finalement, en égalant les résultats (a) et (b) : $E(r)2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$

Champ électrique à une distance r d'un barreau rectiligne infini uniformément chargé :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{[V/m]}$$

a- Champ électrique produit par une plaque infinie uniformément chargée

Soit σ (σ > 0) la densité surfacique de charge de la plaque, mesurée en C/m^2. Pour de raisons de symétrie, le champ électrique doit être perpendiculaire à la plaque. Son module ne peut dépendre que de la distance z à la plaque. Considérons un cylindre de rayon r et de hauteur 2z dont l'axe de symétrie est perpendiculaire à la plaque, comme schématisé ci-dessous.



Cylindre perpendiculaire à la plaque

Appliquons le théorème de Gauss à ce cylindre. La somme des charges entourées est simplement le produit de la densité surfacique par la section du cylindre, soit $\sigma\pi r^2$.

$$\text{Donc : } \oiint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0}$$

La surface S se décompose en 3 surface S_1,S_2,S_3.

$\oiint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = E(z)\pi r^2$ Car la normale à S_1 est parallèle à $\vec{E}$;

$\oiint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = E(-z)\pi r^2 E(z)\pi r^2$ Car la normale à S_3 est aussi parallèle à $\vec{E}$;

$\oiint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = 0$ car la normale à la surface latérale du cylindre est perpendiculaire à $\vec{E}$;

Finalement on égalant les résultats précédents :

$$E(z)(\pi r^2 + \pi r^2) = \frac{\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0}$$

Champ électrique produit par une plaque infinie uniformément chargé

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

4. 4. 3. Loi locale et loi intégrale

Soit une surface (S) fermée, contenant une charge Q répartie uniformément dans le volume v qu'elle entoure, la densité volumique étant ρ.

On a alors :

$$\Phi = \iint_{(s)} \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dv = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Cette écriture constitue la forme intégrale du théorème de Gauss.

Le théorème de la divergence permet d'écrire par ailleurs :

$$\Phi = \iint_{(s)} \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dv = \iiint_V div\,\vec{E} dv$$

De ces relations, on déduit la forme locale suivante pour le théorème de Gauss :

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cette deuxième loi locale de l'électrostatique (comme la $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V\ ou\ \overrightarrow{rot}\ \vec{E} = \vec{0}$) présente un caractère général, elle ne fait intervenir que le point considéré indépendamment de toute symétrie globale.

4. 4. 4. Equations de Poisson et de Laplace

En présence d'une densité volumique de charge, on peut écrire les deux lois locales :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \\ div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow div\left(-\overrightarrow{grad}V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Or :

$div\,(grad) = \nabla.\nabla = \Delta$ On en déduit :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad \text{(Équation de Poisson)}$$

Et dans le vide :

$$\Delta V = 0 \qquad \text{(Équation de Laplace)}$$

4.5. Energie potentielle électrostatique

4.5.1. Travail d'une force électrostatique

Le déplacement d'une charge électrostatique q dans une région de l'espace ou règne un champ $\vec{E}$ dériévant d'un potentiel V, conduit à :

$$dw = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = q.\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -qdV$$

Si cette charge parcourt une distance AB, alors le travail nécessaire pour la déplacer est :

$$w_A^B = q(V_A - V_B)$$

Ce travail est indépendant du chemin suivi, il ne dépend que de la position initiale et de la position finale. La force est conservative.

4.5.2. Energie potentielle

En l'absence de charges à l'infini, l'énergie potentielle d'une charge q au point M, ou règne un potentiel V crée par une charge Q est définie par :

$$\varepsilon_p = qV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

r : étant la distance qui sépare les deux charges.

Comme $V_\infty = 0$ (le potentiel est nul à l'infini car il n'y a pas de charges),

$$\varepsilon_p = qV = q(V - V_\infty) = w_{M\to\infty}$$

Exercices corrigés

Exercice 01

On considère un fil infini uniformément chargé. En déduisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique crée en point M de l'espace distant de r du fil.

Solution

Le fil étant infini, il y a une invariance par translation le long du fil, ceci permet de dire que le champ électrique lui est perpendiculaire et que son intensité en un point M ne dépend que de la distance de ce point au fil.

On choisit ensuite une surface de Gauss cylindrique de hauteur h, de rayon r et d'axe confondu avec le fil chargé. Puis on calcule le flux du champ électrique à travers la surface de Gauss choisie.

D'après le théorème de Gauss, le flux est égal à la somme des charges contenues dans le cylindre divisée par ε_0 :

$$\Phi = \iint_S d\,\vec{\Phi} = \iint_S \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

La surface du cylindre se compose de la surface latérale et de deux bases. Comme le champ est radial, il est parallèle aux bases et le flux correspondant est nul.

Le flux à travers la surface latérale est égal à :

$$\iint_S \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dS} = \iint_S E 2\pi h r = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

On trouve donc :

$$E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi r}$$

Exercice 02

Un fil de longueur 2a porte une charge électrostatique de densité linéique uniforme λ.

1- Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$(M) en un point M de l'axe de symétrie du fil.
2- En déduire les expressions de $\vec{E}$ (M) et de V (M) dans le cas d'un fil infini.
3- Retrouver l'expression du champ $\vec{E}$ (M) en utilisant le théorème de Gauss.

Solution

1- On calcule le champ électrostatique par la méthode direct en un point M de cote z>0 :

L'axe (Oz) est un axe de symétrie de la distribution de charge, donc pour tout point M de (Oz), $\vec{E}(M)$ est suivant $\vec{k}$ tel que

$\vec{E}(M) = E(z)\vec{k}=\int dE_z\vec{k} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha\,\vec{k} = 2\int_0^{+a} \frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 r^2} cos\alpha\,\vec{k}$

On exprime tout en fonction de α et z.

Comme :

$r = \frac{z}{cos\alpha}$ et y = z.tgα $\Rightarrow dy = \frac{zd\alpha}{cos^2\alpha}$

$$\vec{E}(M) = 2\int_0^{\alpha_0} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{zd\alpha}{cos^2\alpha}\frac{cos^2\alpha}{z^2} cos\,\alpha\,\vec{k}$$

En posant l'angle $\alpha_0\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM})$, apres integration, on a :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 z}\sin\alpha_0\ \vec{k}$$

Aussi, $\sin\alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$

Finalement, l'expression du champ électrostatique crée au point M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 z}\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\vec{k}$$

2- Si le fil est infini, l'angle $\alpha_0 = \frac{\pm\pi}{2}$ et le champ devient :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 z}\sin\alpha_0\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.\vec{k} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 z}\vec{k}$$

<u>Remarque :</u>

Le champ électrostatique n'est pas défini au point z=0 (point des sources) et change de ses à la traversée du segment chargé.

Le potentiel électrostatique au point M est :

$$V(M) = -\int_{-a}^{+a}\vec{E}\,\vec{dl} = -\int\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dz}{z}$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}lnz + cte = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{z} + \text{cte}$$

3- En utilisant le théorème de Gauss , la symétrie cylindrique de la distribution de charge , conduit d'une part au un champ électrostatique radial $\vec{E}(M) = E_\rho\overrightarrow{u_\rho}$ et d'autre part, impose de prendre comme surface de Gauss , un cylindre de rayon ρ et d'axe confondu avec le fil .

$$\Phi = \iint_\Sigma \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{S_1}\vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{S_{B1}}\vec{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{S_{B2}}\vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

Comme $\vec{E}(M) = E_\rho \overrightarrow{u_\rho}$ est perpendiculaire aux vecteurs surfaces des deux bases, seul le flux à travers la surface latérale est non nul. Ainsi, on à :

$$\Phi = \iint_{S_1} \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = E_\rho . S_L = E_\rho . 2\pi\rho h = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

D'où :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\overrightarrow{u_\rho}$$

Cette expression est identique a celle trouvée en (exercice 01) con considérant $\overrightarrow{u_\rho}=\vec{k}$

Exercice 03

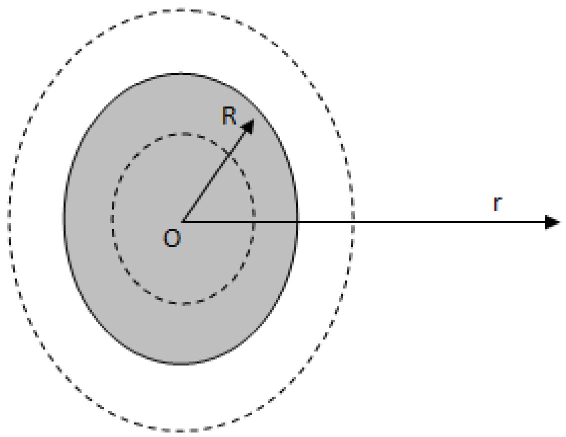
Une sphère de rayon R et de centre O, contient une distribution volumique de charges. La densité volumique n'étant fonction que de la distance r est définie par :

$\rho = b/r$ Avec : 0 < r < R et b = cte

Calculer en utilisant le théorème de Gauss, le champ électrique crée par la distribution dans tout l'espace (0< r < ∞).

Solution

Le champ crée par une sphère étant radial, nous choisirons une surface de Gauss sphérique de centre O.



Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = \iint_S d\,\vec{\Phi} = \iint_S \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

D'où

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

Nous désignerons deux cas :

a- 0 < r < R : nous avons $dq = \rho dv = \frac{b}{r} 4\pi r^2 dr = b4\pi r dr$

$$Q_i = \int_0^r dq = \int_0^r b4\pi r dr = 2\pi b r^2$$

D'où $$E = \frac{Q_i}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{2\pi b r^2}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{b}{2\varepsilon_0}}$$

b- r >R :

$$Q_i = \int_0^R dq = \int_0^R b4\pi r dr = 2\pi b R^2$$

D'où $$E = \frac{Q_i}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{2\pi b R^2}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{bR^2}{2r^2 \varepsilon_0}}$$

Exercice 04

Soient deux charges q=+e et q'=-e placées à une distance d=30 A° l'une de l'autre.

1- quelle est l'énergie interne du système ainsi composé ?

2- quel est le moment électrique dipolaire de ces deux charges ?

3- quelle est l'énergie potentielle du dipôle placé dans une région de l'espace ou le champ électrique $\vec{E}$ est constant ?

Solution

1- l'énergie interne E_i du système est le travail qu'il faut fournir pour l'assembler les deux charges.

$$E_i = k\frac{qq'}{d} = -k\,\frac{e^2}{d}$$

A.N $E_i = -7{,}68 \,.\, 10^{-20} j$

2- si d est la distance de la charge –e à la charge +e, le moment dipolaire est défini par :

$\vec{p} = q.\vec{d}\ ;\ p = q.d$

A.N $p = 4{,}8.\,10^{-28} C.m$

3- si V et V' sont les potentiels aux points M et M' ou sont localisées les charges q et q' , l'énergie potentielle du dipôle s'écrit :

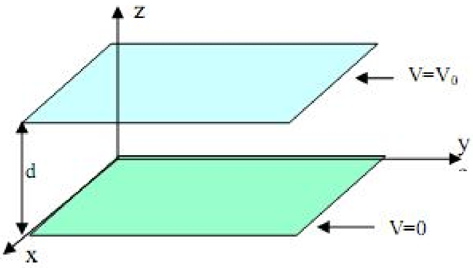
$$E_p = qV + q'V' = q(V - V')$$

$$or\ V - V' = \Delta V = -\vec{E}.\frac{\vec{P}}{q}$$

$$E_p = -\vec{E}.\vec{P}$$

Exercice 05 - Condensateur plan

Deux conducteurs métalliques plans et parallèles d'aire commune À distants de d forment un condensateur plan (voir figure). On négligera les effets de bord. La plaque supérieure est portée au potentiel V_0 et la plaque inférieure est reliée au sol (V=0).



1- Déterminer :

a- la distribution de potentiel entre les deux conducteurs,

b- le champ électrique $\vec{E}$ entre les deux conducteurs,

c- la densité de charge sur chaque plaque,

d- la capacité de ce condensateur plan,

e- Calculer Q_0 et la force qui s'exerce entre les armatures lorsque : V_0= 400V, d = 30μm et A=15cm^2.

2- On déplace l'armature supérieure de z (z<<d) et on augmente la charge Q_0 de q, comment sont modifiées la capacité, la ddp et la force qui s'exerce entre les armatures ?

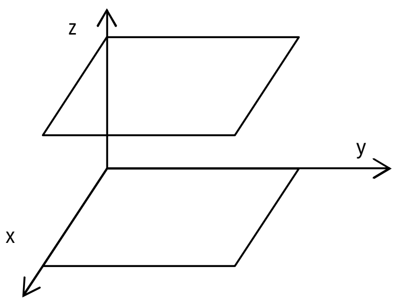
3- Un condensateur plan est à présent de capacité C_0 = 2μF et il est chargée sous une ddp V_0= 1kV.

a- On l'isole électriquement. Calculer le travail minimal qu'un opérateur doit fournir à ce condensateur pour écarter ses armatures de d_0 = 1mm à d_0 = 2mm. Commenter physiquement ce résultat.

b- On maintient la ddp constante. Calculer la variation d'énergie du condensateur et le travail minimal qu'un opérateur doit fournir à ce condensateur pour écarter ses armatures de d_0 = 1mm à d_0 = 2mm. Commenter physiquement ce résultat.

Solution

1-



a- Négliger les effets de bords revient à supposer les plaques infinies et le système est donc invariant par translation suivant x et y.

Le potentiel s'écrit $V(z)$ et l'équation de Laplace donne

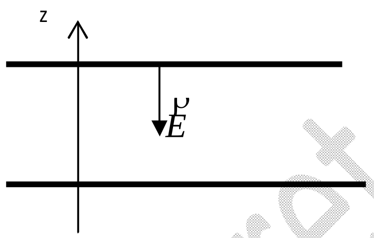
$$\Delta V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = k \Rightarrow V = kz + k'$$

à $z = 0, V = 0 \Rightarrow k' = 0$ et $V(d) = V_0 = kd \Rightarrow$

$$k = \frac{V_0}{d} \text{ et } V(z) = \frac{V_0}{d} z$$

b-

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \Rightarrow \vec{E} = -\frac{V_0}{d}\vec{e_z}$$



c- Sur la plaque supérieure (z=d)

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d}\vec{e}_z = -\frac{\sigma}{\varepsilon_à}\vec{e}_z$$

Soit $\sigma = \frac{\varepsilon_0}{d}V_0$ Sur la plaque inférieure ($z = 0$)

le même raisonnement donne $\vec{E} = -\frac{V_0}{d}\vec{e}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_à}\vec{e}_z$ et

$$\sigma = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{d}$$

d- La charge Q sur la plaque est $Q = \sigma A = \frac{\varepsilon_0 V_0}{d} A$ et la capacité s'écrit : $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

e- Application numérique : $C_0 = 0{,}44 nF$; $Q_0 = 176 nC$

Calcul de la force qui s'exerce sur les armatures :

<u>1ere méthode</u> :

L'énergie électrique du condensateur s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}CV_0^2 = \left[\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{z}V_0^2\right]_{z=d}$$

L'action électrostatique s'écrit :

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{z^2}V_0^2\right]_{z=d} \Rightarrow F_z = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d^2}V_0^2$$

2ere méthode :

La pression électrostatique P sur l'une des plaques s'écrit $P=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ soit $P=\dfrac{(\varepsilon_0 V_0)^2}{2d^2}$ et avec $P=\dfrac{dF}{dS}=\dfrac{F}{A}$ $\Rightarrow$ $F=\dfrac{(\varepsilon_0 V_0)^2}{2d^2}A$ cette force est dirigé suivant $-\vec{e}_z$ soit $\vec{F}=-\dfrac{(\varepsilon_0 V_0)^2}{2d^2}A\,\vec{e}_z$

Application numérique **: F=-1,2 N**

3- Après un déplacement z<<d de l'armature supérieure la capacité s'écrit :

$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d+z}\Rightarrow C=\frac{\varepsilon_0 A}{d(1+\frac{z}{d})}\Rightarrow C=\frac{C_0}{(1+\frac{z}{d})}\Rightarrow C\approx C_0(1-\frac{z}{d})$$

La d.d.p. entre les armatures s'écrit : $V=\dfrac{Q}{C}=\dfrac{(Q_0+q)}{C_0}(1+\dfrac{z}{d})\Rightarrow V=\dfrac{Q_0}{C_0}(1+\dfrac{q}{Q_0})(1+\dfrac{z}{d})$

$V=V_0(1+\dfrac{q}{Q_0})(1+\dfrac{z}{d})$ et en développant à l'ordre 1 on trouve $V=V_0(1+\dfrac{q}{Q_0}+\dfrac{z}{d})$

On peut exprimer la force à partir de l'énergie électrostatique $U=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 A}(d+z)$ à charge étant constante $F_z=-\dfrac{\partial U}{\partial z}$,

$$F_z=-\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\Rightarrow F_z=-\frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 A}(1+\frac{q}{Q_0})^2\Rightarrow F_z\approx-\frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 A}(1+\frac{2q}{Q_0})$$

3-

a- Pour écarter les plaques l'opérateur doit fournir une énergie au moins égale à la variation de l'énergie électrostatique associé à l'écartement des armatures soit :

$$\Delta U=\frac{Q_0^2}{2}(\frac{1}{C}-\frac{1}{C_0})=\frac{Q_0^2}{2C_0}(\frac{C_0}{C}-1)=\frac{Q_0^2}{2C_0}(\frac{d}{d_0}-1)\Rightarrow\Delta U=\frac{C_0V_0^2}{2}(\frac{d}{d_0}-1)$$

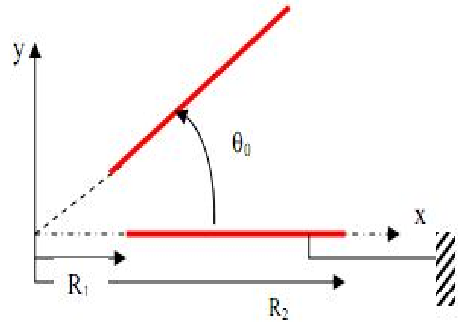
Application numérique : $\Delta U=1j$

b- A potentiel constant $\Delta U=\Delta(\dfrac{CV_0^2}{2})=\dfrac{V_0^2}{2}(C-C_0)=\dfrac{C_0V_0^2}{2}(\dfrac{C}{C_0}-1)=\dfrac{C_0V_0^2}{2}(\dfrac{d_0}{d}-1)$

Application numérique : $\Delta U=1j$

Exercice 06

Deux conducteurs rectangulaires planes d'aire commune A=h (R_2-R_1) forment un condensateur diédrique d'axe Oz et d'angle θ_0 . L'un des conducteurs est relié au sol et l'autre est porté au potentiel positif V_0. On négligera les effets de bord.



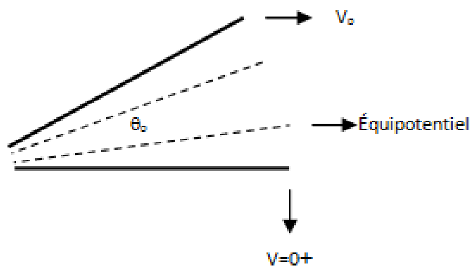
1- Quelle est la forme des équipotentielles entres les armatures ?

2- Déterminer les densités surfaciques de la répartition des charges sur les deux conducteurs.

3- Déterminer la capacité du condensateur et retrouver sa capacité

Solution

1- Les deux armatures sont des plans équipotentiels l'une à V=0 et l'autre à V=V_0 et on passe de l'une à V=0 à l'autre (V=V_0) par une rotation d'angle θ_0 . Ainsi tout plan qui se déduit de l'armature V=V_0 par une rotation d'angle θ forme une surface équipotentielle.



2- En coordonné cylindrique le condensateur présente un symétrie de translation suivant z (Oz est l'axe du dièdre) ainsi le potentiel V ne dépend pas de z.

Vu la forme des équipotentielles, pour θ donné le potentiel est constant quelque soit ρ , ceci montre que le potentiel V ne dépend pas de ρ

Il vient que V(M)=V(θ)

Dans l'espace entre les plaques on a $\Delta V = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta} = k \Rightarrow V = k\theta + k_1$

Avec V(θ=0) =0 k_1=0 et avec V(θ=θ_0)=V_0 on obtient $V(\theta) = \frac{V_0}{\theta_0}\theta$ et le champ électrique

s'écrit : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$, $\vec{E} = -\frac{1}{\rho}\frac{V_0}{\theta_0}\vec{e}_\theta$

Par application du théorème de Coulomb on écrit l'expression du cham électrique au voisinage de chaque armature on trouve

$$\frac{\sigma_{(\theta=0)}}{\varepsilon_0}\vec{e}_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{V_0}{\theta_0}\vec{e}_\theta \Rightarrow \sigma_{(\theta=0)} = -\frac{1}{\rho}\frac{\varepsilon_0 V_0}{\theta_0} \qquad \frac{\sigma_{(\theta=\theta_0)}}{\varepsilon_0}\vec{e}_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{V_0}{\theta_0}\vec{e}_\theta \Rightarrow \sigma_{(\theta=\theta_0)} = \frac{1}{\rho}\frac{\varepsilon_0 V_0}{\theta_0}$$

3- La charge du condensateur est : $Q=\int_{R1}^{R2}\frac{1}{\rho}\frac{\varepsilon_0 V_0}{\theta_0}hd\rho$ soit $Q=\frac{\varepsilon_0 V_0}{\theta_0}h\ln\frac{R_2}{R_1}$ et la capacité est donné par :

$$C=\frac{Q}{V} \text{ soit } C=\frac{\varepsilon_0}{\theta_0}h\ln\frac{R_2}{R_1}$$

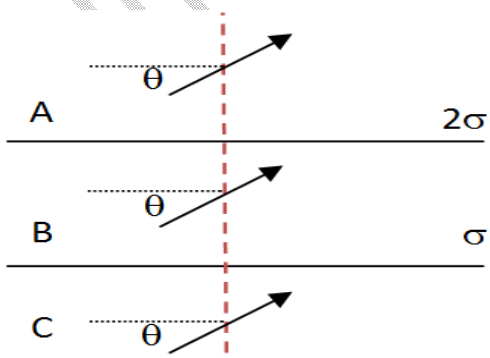
4- L'énergie dans le condensateur s'écrit :

$$U=\iiint_{\substack{espace\,entre\\ les\,armatures}}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau \text{ soit } U=\iiint_{\substack{espace\,entre\\ les\,armatures}}\frac{\varepsilon_0}{2\rho^2}\frac{V_0^2}{\theta_0^2}\rho d\rho d\theta dz \quad U=\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{V_0^2}{\theta_0^2}\int_{R1}^{R2}\frac{d\rho}{\rho}\int_0^{\theta_0}d\theta\int_0^h dz \Rightarrow$$

$$U=\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{V_0^2}{\theta_0}h\ln\frac{R_2}{R_1} \quad \text{comme } U=\frac{1}{2}CV_0^2 \text{ il vient que } C=\frac{\varepsilon_0}{\theta_0}h\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Exercice 07

Soient deux plans Π_1 et Π_2 uniformément chargés en surface. Ils portent respectivement les densités de charge 2σ et σ ($\sigma<0$).



a- Quelle est la valeur du champ dans les trois zones A, B et C.

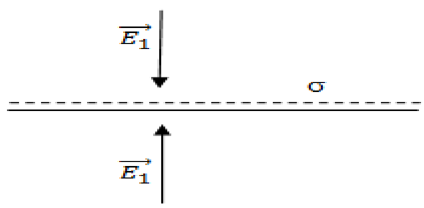
b- Trouver l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle $\vec{P}$ Placé respectivement dans les trois zones A, B et C.

c- Déduire, dans chaque zone la valeur de θ pour que le dipôle Soit en équilibre stable.

Solution

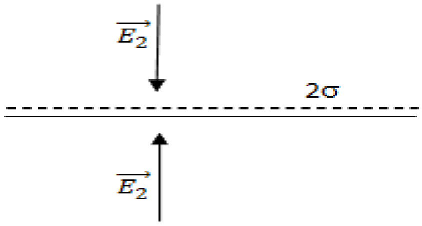
a- En appliquant le théorème de Gauss, on montre que le champ créé par un plan infini de charge surfacique σ est donné par :

$$\boxed{E_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$



Et le champ créé par le plan de charge est donné par :

$$\boxed{E_2 = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

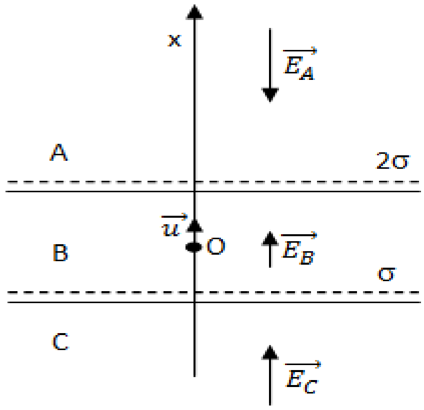


En appliquant le principe de superposition, nous aurons doc pour les trois régions :

$$\vec{E}_A = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u} = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$$

$$\vec{E}_B = -\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$$

$$\vec{E}_C = -\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u} = -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$$



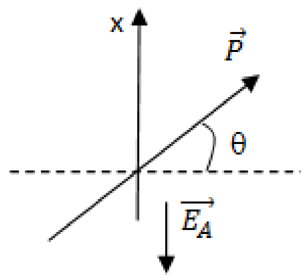
b- L'énergie potentielle est donnée par :

$$E_p = -\vec{E}.\vec{P} = -|\vec{E}|.|\vec{P}|.\cos(\vec{E},\vec{P})$$

Dans la région A :

$$E_{p(A)} = -\frac{3|\sigma|}{2\varepsilon_0}.P.\cos(\theta + \pi/2)$$

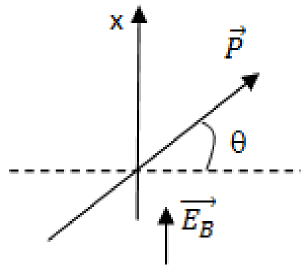
$$\boxed{E_{p(A)} = -\frac{3|\sigma|}{2\varepsilon_0}.P.\sin(\theta)}$$



Dans la région A :

$$E_{p(B)} = -\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}.P.\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

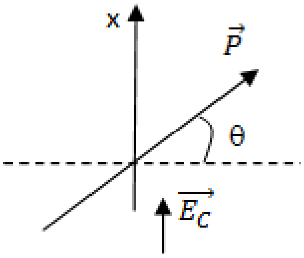
$$\boxed{E_{p(B)} = -\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}.P.\sin(\theta)}$$



Dans la région A :

$$E_{p(C)} = -\frac{3|\sigma|}{2\varepsilon_0}.P.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\boxed{E_{p(C)} = -\frac{3|\sigma|}{2\varepsilon_0}.P.\sin(\theta)}$$



c- Par définition, nous avons l'équilibre stable pour E_p minimum et l'équilibre instable pour E_p maximum ; nous avons donc les différentes régions :

Région	E_p	Sin θ	θ	Equilibre
A	minimum	-1	-π/2	stable
	maximum	+1	+π/2	instable
B	Minimum	-1	-π/2	stable
	Maximum	+1	+π/2	instable
C	Minimum	-1	-π/2	stable
	Maximum	+1	+π/2	instable