1. Cours 3: Relations binaires sur un ensemble.

1.1. Notion de relation:

On appelle relation d'un ensemble A vers un ensemble B toute correpondance $\mathcal{R}$, qui lie des éléments de A à des éléments de B.

**On dit que A est l'ensemble de départ et B est l'ensemble d'arrivée de la relation$\mathcal{R}$.*
**Si x est lié à y par la relation $\mathcal{R}$, on dit que x est en relation $\mathcal{R}$ avec y, ou (x,y) vérifie la relation $\mathcal{R}$ et on écrit: $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x,y)$, sinon on écrit: $x\not{\mathcal{R}}y$ ou $\not{\mathcal{R}}(x,y)$.*

**Une relation de A vers A est dite relation sur A.*

Exemples:

1) La correspondance $\mathcal{R}$ qui lie les entiers à leurs multiples est une relation sur $\mathbb{Z}$, qui est appelée relation de divisibilité et notée $\mathcal{R}_d$.

On a par exemple $1\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

2) La correspondance $\mathcal{R}'$ qui lie les chiffres aux voyelles utilisées pour écrire le chiffre en toutes lettres est une relation de l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ vers l'ensemble $\{a,e,i,o,u,y\}$

On a par exemple $0\mathcal{R}'e$, $0\mathcal{R}'o, 0\not{\mathcal{R}}'a$, $9\not{\mathcal{R}}'y$, $6\mathcal{R}'i$ et $1\mathcal{R}'u$

3) La correspondance $\mathcal{S}$ qui lie les nombres réels ayant les mêmes carrés est une relation sur $\mathbb{R}$.
On a par exemple $1\mathcal{S}1, 1\not{\mathcal{S}}3$ et $2\mathcal{S}(-2)$.

1.1.1. Graphe d'une relation

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble A vers un ensemble B.

1) Le graphe de $\mathcal{R}$ - noté $G_{\mathcal{R}}$ - est l'ensemble défini par:

$$G_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in A \times B \;/\; x\mathcal{R}y\}$$

Exemples

1) Reprenons la relation $\mathcal{R}$ de l'exemple 1 précédent, alors: $G_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;/\; x \text{ divise } y\}$.
Par exemple $(3,-21) \in G_{\mathcal{R}}$ et $(3,20) \notin G_{\mathcal{R}}$

2) Si on reprend la relation $\mathcal{R}'$ donnée par l'exemple 2 précédent, on aura:

$$G_{\mathcal{R}'} = \{(0,e),(0,o),(1,u),(2,e),(2,u),(3,o),(3,i),(4,u),(4,a),(4,e),\\ (5,i),(6,i),(7,e),(8,u),(8,i),(9,e),(9,u)\}$$

3) Pour l'exemple 3 précédent le graphe $G_{\mathcal{S}}$ est le suivant:
$G_{\mathcal{S}} = \{(x, -x), (x, x) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

Remarque: Une relation $\mathcal{R}$ est entièrement déterminée par son graphe, la raison pour laquelle, on identifie $\mathcal{R}$ à $G_{\mathcal{R}}$ et on dit qu'une relation de A vers B est une partie de $A \times B$. Alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}' \Longleftrightarrow G_{\mathcal{R}} = G_{\mathcal{R}'}$.

1.2. Relations sur un ensemble

Définitions: *Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble A est dite:*
1) Réflexive si $\forall \ x \in A : x\mathcal{R}x$.
2) Symétrique si $\forall \ x, y \in A : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
3) Antisymétrique si $\forall \ x, y \in A : (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
4) Transitive si $\forall \ x, y, z \in A : (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow \ x\mathcal{R}z$.

Exemples

1) Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ divise y

* Soit $x \in \mathbb{Z}$, on a x divise x (même 0 divise 0).
donc $\forall \ x \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}x$, alors $\mathcal{R}$ est réflexive.

* Soit $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow (x \text{ divise } y)$
$\not\Rightarrow (y \text{ divise } x)$
par exemple 1 divise 4 et 4 ne divise pas 1
C.à.d: $\exists \ x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \wedge \overline{y\mathcal{R}x}$, alors $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.

* Soit $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow (x \text{ divise } y) \wedge (y \text{ divise } x)$
$\not\Rightarrow (y = x)$
par exemple (1 divise -1) et (-1 divise 1) et $1 \neq -1$
C.à.d: $\exists \ x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \wedge x \neq y$, alors $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.

* Soit $x, y, z \in \mathbb{Z}$, on a $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x \text{ divise } y) \wedge (y \text{ divise } z)$
$\Rightarrow (x \text{ divise } z)$
$\Rightarrow x\mathcal{R}z$
Alors $\mathcal{R}$ est transitive.

2) La relation $\mathcal{S}$ donnée sur $\mathbb{R}$ par: $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

* Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 = x^2$
donc $\forall \ x \in \mathbb{R} \ : x\mathcal{S}x$, alors $\mathcal{S}$ est réflexive.

* Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a: $x\mathcal{S}y \Rightarrow x^2 = y^2$
$\Rightarrow y^2 = x^2$
$\Rightarrow y\mathcal{S}x$

Alors $\mathcal{S}$ est symétrique.

* Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a $(x\mathcal{S}y) \wedge (y\mathcal{S}x) \Rightarrow (x^2 = y^2) \wedge (y^2 = x^2)$
$\nRightarrow (y = x)$

par exemple $(-2)^2 = 2^2$ et $2^2 = (-2)^2$et $(-2) \neq 2$.
C.à.d: $\exists\ x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}x \wedge x \neq y$, alors $\mathcal{S}$ n'est pas antisymétrique.

* Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a $(x\mathcal{S}y) \wedge (y\mathcal{S}z) \Rightarrow (x^2 = y^2) \wedge (y^2 = z^2)$
$\Rightarrow x^2 = z^2$
$\Rightarrow x\mathcal{S}z$

Alors $\mathcal{S}$ est transitive.

3) Soit la relation $\mathcal{R}''$ définie sur $\mathbb{Z}$ par: $a\mathcal{R}''b \Leftrightarrow$ ($a - b$ est impair).

* Soit $a \in \mathbb{Z}$, on n'a pas ($a - a$ est impair).
par exemple $1 - 1$ n'est pas impair.
C.à.d: $\exists a \in \mathbb{Z}$: $\overline{a\mathcal{R}''a}$, alors $\mathcal{R}''$ n'est pas réflexive.

* Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, on a: $a\mathcal{R}''b \Rightarrow a - b$ est impair
$\Rightarrow b - a$ est impair
$\Rightarrow b\mathcal{R}''a$

Alors $\mathcal{R}''$ est symétrique.

* Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, on a $a\mathcal{R}''b \wedge b\mathcal{R}''a \Rightarrow$($a - b$ est impair)$\wedge$($b - a$ est impair)
$\nRightarrow (a = b)$

par exemple ($6 - 1$ est impair) et ($1 - 6$ est impair) et $1 \neq 6$
C.à.d: $\exists a, b \in \mathbb{Z}$: $a\mathcal{R}''b \wedge b\mathcal{R}''a \wedge a \neq b$, alors $\mathcal{R}''$ n'est pas antisymétrique.

* Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$, on a $a\mathcal{R}''b \wedge b\mathcal{R}''c \Rightarrow$($a - b$ est impair)$\wedge$($b - c$ est impair)
$\nRightarrow a - c$ est impair

par exemple ($7 - 4$ est impair) et ($4 - 1$ est impair) et $7 - 1$ n'est pas impair
C.à.d: $\exists a, b, c \in \mathbb{Z}$: $a\mathcal{R}''b \wedge b\mathcal{R}''c \wedge \overline{a\mathcal{R}''c}$, alors $\mathcal{R}''$ n'est pas transitive.

Remarque: Une relation peut être non symétrique et non antisymétrique . (voir exemple 1)

1.3. Relation d'équivalence, classes d'équivalence et ensemble quotient

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble A
1) $\mathcal{R}$ est dite relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.
2) Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, alors
2.1) Pour chaque $a \in A$ l'ensemble $\dot{a} = \{x \in A \ / \ x\mathcal{R}a\}$ est appelé classe d'équivalence

de a modulo $\mathcal{R}$.
2.2) L'ensemble $A_{/\mathcal{R}} = \left\{ \overset{\bullet}{a} \ / \ a \in A \right\}$ est appelé quotient de A par $\mathcal{R}$.

Exemples:
1) La relation $\mathcal{S}$ donnée sur $\mathbb{R}$ par: $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ est une relation d'équivalence.
Pour $a \neq 0$, on a: $\overset{\bullet}{a} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x\mathcal{S}a\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 = a^2\}$ et $\overset{\bullet}{0} = \{0\}$.
$= \{a, -a\}$
$\mathbb{R}_{/\mathcal{R}_3} = \{\{0\}, \{a, -a\} \ / \ a > 0\}$ qui peut être identifié à $\mathbb{R}^+$

2) Soit $\widetilde{\mathcal{R}}$ la relation de congruence modulo n définie sur $\mathbb{Z}$ par: $x\widetilde{\mathcal{R}}y \Longleftrightarrow (n \text{ divise } x - y)$, est bien une relation d'équivalence.

Pour cette relation on a:
$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{a} &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ n \text{ divise } x - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x - a = n.k \ , k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x = nq + a, \quad q \in \mathbb{Z}\} \text{ noté } n\mathbb{Z} + a\end{aligned}$$
Dans ce cas $\mathbb{Z}_{/\widetilde{\mathcal{R}}} = \{n\mathbb{Z} + a \ / \ a \in \mathbb{Z}\}$ qui est souvent noté $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$

Remarques: La classe $\overset{\bullet}{a}$ est aussi noté $\bar{a}$, $[a]$ et $Cl(a)$.

1.4. Relation d'ordre

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble A
1) $\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre, si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
2) Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, on écrit souvent $\leq_{\mathcal{R}}$ au lieu de $\mathcal{R}$.
2.1) $\leq_{\mathcal{R}}$ est dite relation d'ordre total, si $\forall \ x, y \in A : (x \leq_{\mathcal{R}} y) \vee (y \leq_{\mathcal{R}} x)$
2.2) $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel, si $\exists \ x, y \in A : (x \nleq_{\mathcal{R}} y) \wedge (y \nleq_{\mathcal{R}} x)$

Remarque: Deux éléments x et y sont dits comparables par $\leq_{\mathcal{R}}$, si $x \leq_{\mathcal{R}} y$ ou $y \leq_{\mathcal{R}} x$

Exemples:

1) La relation de divisibilité $\mathcal{R}_d$ sur $\mathbb{Z}$ n'est pas une relation d'ordre, (car elle n'est pas antisymétrique), mais elle devient une relation d'ordre partiel si on se restrient à $\mathbb{N}$ et on la note dans ce cas $\leq_d$.

En effet: Soit $a, b \in \mathbb{N}$ on a:

$$
\begin{aligned}
(a\mathcal{R}_d b)\wedge(b\mathcal{R}_d a) &\Rightarrow \begin{cases} b = qa\ ,\ q\in\mathbb{N} \\ et \\ a = q'b\ ,\ q'\in\mathbb{N} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} b\,(1-qq') = 0,\ q\in\mathbb{N} \\ et \\ a = q'b\ ,\ q'\in\mathbb{N} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \vee q = q' = 1 \\ et \\ a = q'b \end{cases} \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \wedge a = 0 \\ ou \\ a = b \end{array}\right. \\
&\Rightarrow a = b
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{R}_d$ est antisymetrique sur $\mathbb{N}$.(Il est clair que $\mathcal{R}_d$ est refléxive et transitive).

$\mathcal{R}_d$ est un ordre partiel sur $\mathbb{N}$ car par exemple $(3 \not\leq_{\mathcal{R}_d} 7)\wedge(7 \not\leq_{\mathcal{R}_d} 3)$.

2) La façon avec laquelle sont rangés les mots dans un dictionnaire définie une relation d'ordre total sur l'ensemble des mots appelée **ordre lexicographique** et noté $\leq_{lex}$. On a par exemple *algèbre* $\leq_{lex}$ *analyse.*