Université Ibn khaldoun Tiaret

Faculté des mathématiques et informatique Janvier 2014

Département Informatique

***Module*** : Simulation à Evénement Discret

***Fiche TD n° : 4*** (Chaines de Markov)

**Exercice 1**

Un psychologue fait les hypothèses suivantes sur le comportement de souris soumises à un régime alimentaire particulier, lors d’une expérience particulière 80% des souris qui allaient vers la droite, lors de l’expérience précédente, iront également vers la droite, et 60 % des souris qui allaient vers la gauche lors de l’expérience précédente, irons vers la droite cette fois-ci. En supposons que 50% allaient à droite lors de la première expérience, Que va prédire le psychologue pour :

* La seconde expérience ?
* La troisième expérience ?

**Exercice 2**

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jo urs de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu’il y ait changement de temps le lendemain, et s’il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

* Former à partir de cela, une chaine de Markov et en déterminer sa matrice de transition.
* Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le lendemain?
* Si on suppose que l’on a que deux états (beau temps et mauvais temps), dé terminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

**Exercice 3**

Trois balles blanches et trois balles noires sont distribuées dans deux urnes (trois balles dans chacune). Nous disons que le système est dans l’état i si la première urne contient i balles blanches, avec i=0, 1, 2, 3. À chaque étape, on tire au hasard une balle de chacune des deux urnes, puis on place la balle tirée de la première urne dans la seconde et, réciproquement, on place la balle tirée de la seconde urne dans la première. Nous désignons par Xn l’état du système après n étapes.

* Expliquer pourquoi {Xn} ou n=0,1,2,3 est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice des probabilités de transition.

**Exercice 4**

Une particule en rond à travers une suite de points désignés par 0, 1, 2, 3, 4 (placés en sens horaire). À chaque étape, la particule a une probabilité p de se déplacer vers la droite (sens horaire) et une probabilité   
1-p de se déplacer vers la gauche (sens antihoraire). Nous désignons par la position Xn de la particule dans le cercle après n étapes. Le processus { Xn } n=0,1,2, …. est une chaîne de Markov.

* Trouver sa matrice des probabilités de transition.
* Calculer sa distribution stationnaire**π**.

**Exercice 5**

Considérons la chaîne de Markov à six états {e1, e2, e3, e4, e5, e6} et dont la matrice des probabilités de transition est donnée par :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 3/5 | 0 | 2/5 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 7/10 | 0 | 3/10 | 0 |
| 2/5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3/5 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

1. Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.
2. Déterminer quels états communiquent entre eux (donner les classes).
3. Déterminer quels états sont récurrents et lesquels sont transitoires.
4. Est-ce que cette chaîne de Markov est irréductible ?

**Exercice 6**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| - | 1/2 | 0 | 0 |
| - | 1/3 | 1/3 | 0 |
| 0 | 0 | 1/2 | 1/2 |
| 1/4 | - | 0 | 1/2 |

Soit l’espace d’états E = {1, 2, 3, 4} d’une chaîne de Markov.

* Compléter la matrice suivante pour qu’elle soit une matrice de transition et dessiner son graphe représentatif.
* Déterminer sa distribution stationnaire π.
* On considère qu’au temps 0, on est dans l’état 1. Pour un grand nombre d’unité de temps n, quelles sont les probabilités qu’on soit dans chacun des quatre états ? justifier