Université Ibn Khaldoune Tiaret
Faculté Math & Informatique
Département de l'Informatique

Master GL 1 + RT 1 Module : Math Appliquées

<u>Contrôle</u> ***2021-2022*** ***1h***

<u>Exercice N° 1</u> : (12 pts)

Soit la fonction f définie par : $f(x_1, x_2) = x_1^4 x_2 - x_2^2 - x_2 \ln(x_1 + 1) + 2$

1. Donnez le domaine de définition D de f ,
2. Calculer les dérivées premières et secondes de f ,
3. Calculer la <u>valeurs</u> des dérivées premières et secondes de f au point (0,0),
4. Calculer le <u>déterminant</u> de la matrice hessienne $H_f(0,0)$,
5. Est-ce que la fonction f est <u>convexe</u> ?

<u>Exercice N° 2</u> : (8 pts) Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Chercher la valeur de x qui minimise f en utilisant l'algorithme de descente de gradient. $x_0 = -5$ $\alpha = 0.2$ et comme critère d'arrêt **10 itérations**. Présentez les résultats sous forme de tableau.

Université Ibn Khaldoune Tiaret
Faculté Math & Informatique
Département de l'Informatique

Master GL 1 + RT 1 Module : Math Appliquées

<u>Contrôle</u> ***<u>Correction</u>*** ***2021-2022***

<u>Exercice N° 1</u> : (12 pts)

1. $f(x_1, x_2) = x_1^4 x_2 - x_2^2 - x_2 \ln(x_1 + 1) + 2$

est définie si et seulement si $x_1 > 1$, donc l'ensemble de définition de f est le

demi-plan ouvert $D = \{(x_1, x_2) \in R^2 ; x_1 > -1\}$ qui est un sous-ensemble ouvert et convexe de R^2 :

2. Les dérivées premières et secondes de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 4x_1^3 x_2 - \frac{x_2}{(x_1 + 1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1^4 - 2x_2 - \ln(x_1 + 1)$$

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1^2 x_2 + \frac{x_2}{(x_1+1)^2} & 4x_1^3 - \frac{1}{(x_1+1)} \\ 4x_1^3 - \frac{1}{(x_1+1)} & -2 \end{pmatrix}$$

La fonction f est deux fois différentiable en (0; 0), et ses dérivées partielles premières et secondes en (0; 0) sont :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Le déterminant de la matrice hessienne en (0; 0) est :

$$\Delta_{H_f} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0).\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0)\right]^2 = -1$$

donc la matrice hessienne $H_f(0,0)$ n'est ni semi-définie positive ni semi-définie négative et donc la fonction f n'est ni convexe ni concave sur D.

<u>Exercice N° 2</u> : (8 pts) : Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Chercher la valeur de x qui minimise f en utilisant l'algorithme de descente de gradient.
$x_0 = -5$ $\alpha = 0.2$ et comme critère d'arrêt **10 itérations**.

x	$\nabla f(x)$	$f(x)$
-5.0000	-13.0000	42.0000
-2.4000	-7.8000	14.9600
-0.8400	-4.6800	5.2256
0.0960	-2.8080	1.7212
0.6576	-1.6848	0.4596
0.9946	-1.0109	0.0055
1.1967	-0.6065	-0.1580
1.3180	-0.3639	-0.2169
1.3908	-0.2184	-0.2381
1.4345	-0.1310	-0.2457

La solution avec **10** itérations : $x = 1.4345$ $\nabla f(x) = -0.1310$ $f(x) = -0.2457$

La solution avec **25** itérations : $x = 1.4996$ $\nabla f(x) = -0.0008$ $f(x) = -0.2500$ est plus précise