Université Ibn Khaldoun de Tiaret - Département d'Informatique

Semestre II Année Universitaire : 2018-2019

Corrigé de l'examen final d'algèbre 2 – (1ère année LMD MI)

15 juillet 2019 Durée : 1;30 Heure

Exercice 01 :(05pts)

Sur $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on définit les deux lois $\bigoplus$ et $\bigodot$ par
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall (x,\ y), (x',\ y') \in E$:

$$(x,\ y) \bigoplus (x',\ y') = (xx',\ yy') \ \ et\ \ \alpha \bigodot (x,\ y) = (1,\ y^\alpha)\ .$$

On admet que $(E,\ \bigoplus)$ est un groupe commutatif.

✓ Est ce que $(E,\ \bigoplus,\ \bigodot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

$\prec$ Vérifier toutes les étapes $\succ$

Solution :

1)$(E,\ \bigoplus)$ etant un groupe commutatif, il reste à vérifier les propriétés liées à la deuxème loi .

2) Soient $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ et $(x,\ y), (x',\ y') \in E$.

2.0) On a $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, *donc* $1,\ y^\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; c, à, d :
$(1,\ y^\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* = E$. Alors la loi est une loi externe dans E à coefficients dans $\mathbb{R}$ 1*pt*

2.1) $\alpha \bigodot ((x,\ y) \bigoplus (x',\ y')) = \alpha \bigodot (xx',\ yy') = (1,\ (yy')^\alpha)$

$$= (1.1,\ y^\alpha y'^\alpha) = (1,\ y^\alpha) \bigoplus (1,\ y'^\alpha)$$

$$= \alpha \bigodot (x,\ y) \bigoplus \alpha \bigodot (x',\ y') \ldots\ldots\ldots 1pt$$

2.2) $(\alpha + \beta) \bigodot (x,\ y) = (1,\ y^{(\alpha+\beta)}) = (1.1,\ y^\alpha y^\beta)$

$$= (1,\ y^\alpha) \bigoplus (1,\ y^\beta)$$

$$= \alpha \bigodot (x,\ y) \bigoplus \beta \bigodot (x,\ y) \ldots\ldots\ldots 1pt$$

2.3) $(\alpha.\beta) \bigodot (x,\ y) = (1,\ y^{(\alpha.\beta)}) = (1, (y^\beta)^\alpha)$

$$= \alpha \bigodot (1,\ y^\beta)$$

$$= \beta \bigodot (x,\ y) \ldots\ldots\ldots 1pt$$

2.4) $1 \bigodot (x,\ y) = (1,\ y^1) = (1,\ y) \neq (x,\ y) \ldots\ldots\ldots 1pt$

Par suite $(E,\ \bigoplus,\ )$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 02 :(09pts)

On considère l'ensemble E de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t = x + y + z\right\}$$

1.) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2.) Donner une base **et** la dimension de E.

3.) On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\right\}$$

3.1) Donner une base de F.

3.2) Quelle est la dimension de F.

4.) Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Solution :

1) On a $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0)$ et $0 = 0 + 0 + 0$, alors $0_{\mathbb{R}^4} \in E \ldots..(0.5pt)$

Soit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ et $(x,\ y,\ z,\ t)$, $(x',\ y',\ z',\ t') \in E$,

On a $\alpha(x,\ y,\ z,\ t) + \beta(x',\ y',\ z',\ t') = (\alpha x + \beta x',\ \alpha y + \beta y',\ \alpha z\ + \beta z',\ \alpha t\ + \beta t')$,

$\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z' = \alpha(x + y + z) + \beta(x' + y' + z') = \alpha t + \beta t'$

alors $\alpha(x,\ y,\ z,\ t) + \beta(x',\ y',\ z',\ t') \in E$.

Par suite E est un sous space vectoriel de $\mathbb{R}^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$(0lpt)

2) Soit $(x,\ y,\ z,\ t) \in E,\ \text{c} - \text{à} - \text{d} : t = x + y + z$

donc $(x,\ y,\ z,\ t) = (x,\ y,\ z,\ x + y + z) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 1)$

Posons $a = (1, 0, 0, 1) \in E$, $b = ((0, 1, 0, 1) \in E$ et $c = ((0, 0, 1, 1) \in E$.

Alors $B = \{a, b, c\}$ est une partie génératrice de E. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (01pt)$

Soit $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Alors $B = \{a, b, c\}$ est une partie libre de E. $\ldots\ldots\ldots (0.5pt)$

Par suite $B = \{a, b, c\}$ est une base de E et $\dim E = card(B) = 3$ $\ldots\ldots 0.5 + 0.5pt$

3.1) Soit $(x,\ y,\ z,\ t) \in F,\ \text{c} - \text{à} - \text{d} :$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

donc $(x,\ y,\ z,\ t) = (0,\ 0,\ 0,\ t) = t(0,0,0,1)$

Il est clair que $(0,0,0,1) \in F$, donc $\{(0,0,0,1)\}$ est une partie génératrice de F. Puisque $(0,0,0,1) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ alors $\{(0,0,0,1)\}$ est libre. $\ldots\ldots\ldots 01 + 0.5pt$

Par suite $\{(0,0,0,1)\}$ est une base de F $\ldots\ldots\ldots 0.5pt$

3.2) $\dim F = 1$ $\ldots\ldots\ldots 0.5pt$

4)

$*$ **Déterminons** $E \cap F$: $\ldots\ldots\ldots 0.5 + 0.5 + 0.5pt$

Soit $u \in E \cap F$; $\text{c} - \text{à} - \text{d} :$ $u \in E$ et $u \in F$, alors :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ x-y+z=0 \\ et \\ x+y+z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases}$$

Donc $u = 0_{\mathbb{R}^4}$.

On en déduit que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ (et par conséquent, $\dim\ (E \cap F) = 0$)

$*$ **Déterminons** $E + F$: $\ldots\ldots\ldots 0.5 + 0.5pt$

$\dim\ (E \cap F) = \dim\ E + \dim\ F - \dim\ (E \cap F) = 1 + 3 - 0 = 4 = dim\mathbb{R}^4$ et $E + F \subset \mathbb{R}^4$ comme sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Donc $E + F = \mathbb{R}^4$.

Par suite E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 03 :(06pts)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que :

$$f\,(x, y, z) = (-2x + 2y - z, 2x + 2z, 2y + z)\,.$$

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer dim(kerf) et dim(Imf).
3) Est ce que f est un isomorphisme ?≺Justifier≻

Solution :

1) Soit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ et $(x,\ y,\ z), (x',\ y',\ z') \in \mathbb{R}^3$ On a :

$f(\alpha(x,\ y,\ z)+\beta(x',\ y',\ z')) = f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z') = (-2(\alpha x+\beta x')+2(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z'), 2(\alpha x+\beta x')+2(\alpha z+\beta z'), 2(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z')) = \alpha(-2x+2y-z, 2x+2z, 2y+z)+\beta(-2x'+2y'-z', 2x'+2z', 2y'+z')$
$= \alpha f(x,\ y,\ z) + \beta f(x',\ y',\ z') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1pt$

Alors f est linéaire.

2)$\ker f = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,\ y,\ z) = 0\}$

Ona $f(x,\ y,\ z,\ t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y-z=0 \\ 2x+2z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-\frac{z}{2} \end{cases}$

$\ker f = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x=-z\ \ et\ y=-\frac{z}{2}\} \cdots\cdots 0.5+0.5pt$

Ona $(x,\ y,\ z) = (-z,\ -\frac{z}{2},\ z,) = z(-1,-\frac{1}{2},1)$

Il est clair que $(-1,-\frac{1}{2},1) \in \ker f$, donc $\{(-1,-\frac{1}{2},1)\}$ est une partie génératrice de $\ker f$. Puisque $(-1,-\frac{1}{2},1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $\{(-1,-\frac{1}{2},1)\}$ est libre.

Par suite $\{(-1,-\frac{1}{2},1)\}$ est une base de $\ker f$ et $\dim \ker\ f = 1 \ldots 01+0.5pt$

✓ On a $\dim \operatorname{Im}\ f = \dim \mathbb{R}^3 -$ $\dim \ker\ f = 3-1 = 2.$ $\cdots\cdots 0.5+0.5pt$

4) f n'est pas un isomorphisme puisque f n'est pas bijective parceque : $\cdots\cdots 0.5pt$

- f n'est pas injective (car : $ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$).$\cdots\cdots 0.25+0.25pt$

Et

- f n'est pas surjective (car : $\dim \operatorname{Im}\ f \neq \dim \mathbb{R}^3$). $\cdots\cdots 0.25+0.25pt$