Université Ibn Khaldoun de Tiaret. **Département d'Informatique**
Module:Algèbre 2 ($1^{ère}$ Année LMD)

Fiche de T.D N^0 1 (2018-2019)

Exercice 1: On munit $\mathbb{R}^2$ par les lois $+$ et $\odot$ définies comme suit:
$\forall\alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$
$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$ et $\alpha \odot (x,y) = (\alpha x, y)$
Est-ce que $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel?

Exercice 2 (Supplémentaire):
On munit $\mathbb{R}_+^{*2}$ par les lois $\boxplus$ et $\boxdot$ définies comme suit:
$\forall\alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$
$(x,y) \boxplus (x',y') = (xx', yy')$ et $\alpha \boxdot (x,y) = (x^\alpha, y^\alpha)$
Est-ce que $\left(\mathbb{R}_+^{*2}, \boxplus, \boxdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel?

Exercice 3:
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$?
Dans le cas affirmatif, trouver des bases.
$W_0 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 3x - 2y + 2z = 0 \text{ et } 2y = t\}$ $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / xy = 3t\}$
$W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y - t = 0\}$

Exercice 4: Soient $u = (2,1,1)$ et $v = (1,3,1)$.
1) Montrer que $\{u,v\}$ est une partie libre de $\mathbb{R}^3$.
2) Soit $w = (-2, \alpha, \alpha+2)$. Déterminer le réel α pour que $w \in \langle u,v\rangle$ puis compléter $\{u,v\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5: Soit $\mathbb{R}_3[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \deg P \leq 3\}$.
1) Donner la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.
2) Montrer que $A = \{X, 3+2X, X+2X^3\}$ est une partie libre de $\mathbb{R}_3[X]$, puis compléter A pour obtenir une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 6: Soient les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants:
$W_0 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 3x - 2y + 2z = 0 \text{ et } 2y = t\}$ $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y - t = 0\}$
$W_3 = \langle (0,2,1,0), (0,0,1,1), (0,2,2,1)\rangle$
1) W_0 et W_1 sont-ils supplémentaires l'un de l'autres?
2) Même question pour W_0 et W_3.