Université Ibn Khaldoun – Tiaret — *Département de l'Informatique*

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique — *Module : Algèbre 01 (1ère Année LMD 2018-2019)*

Fiche de TD n° 01

EXERCICE 01:

Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

$P_1: ((5-2=7) \wedge (1+3 \leq 0)) \vee \overline{(5\times 6 = 11)}$

$P_2: ((5-2=7) \Rightarrow (1+3 \leq 0)) \wedge (\sqrt{2} = 1.41)$

$P_3: ((5-2=7) \vee (2^4 < 16)) \Rightarrow (5\times 6 = 11)$

$P_4: ((5-2=7) \Rightarrow (2^4 > 16)) \Rightarrow (5\times 6 = 11)$

$P_5: ((5-2=7) \Leftrightarrow (2^4 < 16)) \Rightarrow (4 \; divise \; 20)$

$P_6: (((0 \; divise \; 6) \Leftrightarrow (2^4 < 16)) \vee (0 > 1)) \Leftrightarrow \overline{(\frac{2}{3} = 0.66)}$

Ecrire les négations de ces propositions.

EXERCICE 02:

Soient P, Q et R des propositions. Montrer qu'on a les équivalences suivantes :

1) $(\overline{P \wedge Q}) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$
2) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$
3) $((P \wedge Q) \vee R) \Leftrightarrow ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$
4) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

EXERCICE 03:

Ecrire les négations des énoncés suivants et dire s'ils sont vrais ou faux

$P_1: \exists x \in \mathbb{R}^+, \; x^3 - 3\sqrt{3} = 0$

$Q_1: \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \; x^2 + y^2 \geq 0$

$P_2: \forall q \in \mathbb{Q}, \; q + \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$

$Q_2: \exists n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, \; x^n = 0$

$P_3: \forall n \in \mathbb{N}, \; ((n \geq 2) \vee (2 \; divise \; n))$

$Q_3: \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \; x \leq n$

$P_4: \exists a \in \mathbb{Z}, \; ((a \; est \; impair) \wedge (a < 0))$

$Q_4: \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \; x \leq n$

EXERCICE 04:

1) Montrer, par l'absurde, que $\frac{Ln(5)}{Ln(4)}$ est un nombre irrationnel.
2) Soient k et k' deux entiers naturels non nuls. Montrer par contraposée que: $(kk' = 1) \Rightarrow (k = k' = 1)$)
3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par disjonction des cas que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.
4) Soit $x \; et \; y$ deux nombres réels. Posons $x * y = x + y + xy$.
   - Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \; (x * x) * x = x^3 + 3x^2 + 3x$.
   - Montrer que $\exists x \in \mathbb{R}, \; x * x = x$.

EXERCICE 05 (supplémentaire):

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1) f s'annule
2) f est la fonction nulle
3) f n'est pas une fonction constante
4) f ne prend jamais deux fois la même valeur
5) f est positive
6) f est bornée

EXERCICE 06 (supplémentaire):

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a^2 est pair si et seulement si a est pair.
2) Sachant que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
   Montrer, que l'ensemble $\boldsymbol{P}$ des nombres premiers est infini.