Fiche de TD n°02

EXERCICE 01 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

a) Montrer que : 1) $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$ 2) $A = B \Leftrightarrow C_E A = C_E B$

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 4) $C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$

b) Soit $f : E \to E$ une application . Montrer que :

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
5. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
6. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

c) A quelle condition sur f, on a $A = f^{-1}(f(A))$. ***(supplémentaire).***

EXERCICE 02 :

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications. Montrer que :

1) (f et g sont bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective) et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
2) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
3) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective
4) $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives $\Rightarrow f, g$ *et* h sont bijectives ***(supplémentaire).***

EXERCICE 03 :

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si \ \ n \ est \ pair \\ \frac{n-1}{2} & si \ \ n \ est \ impair \end{cases}$$

1) Déterminer $f^{-1}(\{0,1,2\})$ *et* $g(\{0,1,2\})$.
2) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
3) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$, puis étudier leur bijectivité.

EXERCICE 04 : (supplémentaire).

Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$; $g_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$; $g_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$; $g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ *et* $g_5 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$.