Université Ibn Khaldoun – Tiaret | Département de l'Informatique
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique | Module : Algèbre 01 (1ère Année LMD 2018-2019)

Fiche de TD n° 03

EXERCICE 01 :

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall a, b \in \mathbb{N}$: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \text{ divise } 2b$.

- Etudier la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité de $\mathcal{R}$.

EXERCICE 02 :

Soit $\mathbb{S}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x\mathbb{S}y \Leftrightarrow x - y = x^2 - y^2$.

1) Montrer que $\mathbb{S}$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer $\dot{0}$, $\dot{\left(\frac{1}{2}\right)}$, $\dot{\sqrt{2}}$.

EXERCICE 03 :

Soit $\mathbb{T}$ la relation définie sur $]1, +\infty[$ par : $\forall x, y \in]1, +\infty[$: $x\mathbb{T}y \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \geq \frac{y}{y^2+1}$.

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.
2) L'ordre est-il total ?

EXERCICE 04 :

1) Soit ψ la relation définie sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ par :

$$\forall (m, n), (p, q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \quad (m, n)\ \psi\ (p, q) \Leftrightarrow (m \leq p \quad et \quad n \leq q).$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

2) Soit φ la relation définie sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall (m, n), (p, q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* : \quad (m, n)\ \varphi\ (p, q) \Leftrightarrow mq = np.$$

φ est-elle une relation d'équivalence?

EXERCICE 05 : *(supplémentaire).*

Soit E un ensemble muni d'une relation $\mathcal{R}$ réflexive et transitive. On définit sur E la relation $\mathbb{S}$ par : $\forall x, y \in E$: $x\mathbb{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \quad et \quad y\mathcal{R}x)$.

- Montrer que $\mathbb{S}$ est une relation d'équivalence.