Fiche de TD n⁰ 04

EXERCICE 01 :

1) Soit $*$ une loi de composition définie sur $\mathbb{Z}$ par, $\forall x, y \in \mathbb{Z}: \; x * y = x + y + x^2 y$
   - Étudier les propriétés de $*$.
2) ***(supplémentaire).*** Soit Δ une loi de composition définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*: \; x \Delta y = \sqrt{x^2 + y^2}$
   - Étudier les propriétés de Δ.

EXERCICE 02 :

Soit ∇ une loi de composition définie sur $]-1,1[$ par, $\forall x, y \in]-1,1[: \; x \nabla y = \frac{x+y}{1+xy}$

- Montrer que $(]-1,1[, \nabla)$ est un groupe abélien .

EXERCICE 03 :

Soit Δ une loi de composition définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}: \; (x,y)\Delta(x',y') = (xx' , \; xy' + y) .$$

1. Étudier les propriétés de Δ et conclure.
2. Montrer que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \; \Delta)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \; \Delta)$.

EXERCICE 04 :

Soit $H = \{a + b\sqrt{2} \; / \; a, b \in \mathbb{Z}\}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $(H, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Montrer que $(H, +, \cdot)$ est un anneau unitaire intègre.
3. ***(supplémentaire).*** Pour tout $x = a + b\sqrt{2}$ de H, on pose $N(x) = a^2 - 2b^2$,
   - Montrer que pour tous x, y de H, $N(xy) = N(x)N(y)$.
   - En déduire que x est inversible dans H si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

EXERCICE 05 :

On définit l'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2: \; (a,b) + (c,d) = (a + c , \; b + d) \; , \; (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd \; , \; ad + bc)$$

- Montrer que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif, $(\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2)$.

EXERCICE 06 : ***(supplémentaire).***

Soit $\star$ une loi de composition interne définie sur un ensemble E non vide.

1. Montrer que si l'élément neutre de $\star$ existe dans E, il est unique.
2. Si $\star$ est associatives, montrer que si le symétrique d'un élément x de E existe , il est unique.