Université Ibn Khaldoun de Tiaret. **Département d'Informatique**
Module:Algèbre 2 ($1^{ère}$ Année LMD)

Fiche de T.D N^0 3 (Algèbre 2)

Exercice 1: Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1) Caluler, si c'est possible, $(A+B)^t (A-B)$, A^2, ${}^tBB$, ${}^tBB - A^tA$
2) Trouver les matrices inverses de $\frac{1}{4}(A+B)^t (A-B)$ et ${}^tBB$ (si elles existent).

Exercice 2: Soit $f :: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x,y) = (-x+y, x+2y, 3x)$.

1) Montrer que f est linéaire puis donner sa matrice relativement aux bases canoniques $\beta_{\mathbb{R}^2}$ et .$\beta_{\mathbb{R}^3}$
2) Soient $\overline{\beta}_{\mathbb{R}^2} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2)$ et $\widehat{\beta}_{\mathbb{R}^3} = (\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_3)$ les bases respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ données par: $\overline{e}_1 = (1,-1)$, $\overline{e}_2 = (-1,0)$ et $\widehat{e}_1 = (-1,0,0)$, $\widehat{e}_2 = (1,1,2)$, $\widehat{e}_3 = (0,0,2)$
Donner la matrice de f relativement aux bases $\overline{\beta}_{\mathbb{R}^2}$ et $\widehat{\beta}_{\mathbb{R}^3}$.
3) Déterminer les matrices de passages de $\beta_{\mathbb{R}^2}$ à $\overline{\beta}_{\mathbb{R}^2}$ et de $\beta_{\mathbb{R}^3}$ à $\widehat{\beta}_{\mathbb{R}^3}$.
4) Recalculer la matrice de f relativement aux bases $\overline{\beta}_{\mathbb{R}^2}$ et $\widehat{\beta}_{\mathbb{R}^3}$ en utilisant les matrices de passages.

Exercice 3: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par: $f(P) = (1+X)P'$

1) Montrer que f est linéaire puis déterminer la matrice B associée à f relativement à la bases $\beta' = \left(1, 1+X, (1+X)^2\right)$.
2) Déterminer la matrice B_3 associée à $f \circ f \circ f$ relativement à la bases β'.
3) Calculer le rang de f. Est ce que f est un automorphisme? (Justifier)

Exercice 4: Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $\det A$, $\det B$, $\det C$, $\det(2A)$, $\det(2C)$, $\det(BC)$, $\det(B+C)$,

Exercice 5 (supplémentaire): Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$
Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3, h(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base a.
2) Soient $b = (0,1,1)$ et $c = (1,1,2)$. Montrer que $\beta' = (a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Déterminer la matrice de passage P de β à β', puis calculer P^{-1}.
4) Déterminer la matrice D de h dans la base β'.