Université Ibn khaldoun de Tiaret
département Informatique
Module Analyse 1
Fiche des travaux dirigées 02

Exercice 01
1)En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que :
$\lim\limits_{n\to+\infty} 2\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n} = 2,\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} 3^{2n+1} = +\infty,\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-11n++3}{2n^2+4n-5} = \dfrac{1}{2}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0, \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n n = +\infty$
2)Montrer que si $(u_n)_n$ une suite converge vers l alors les suites $|u_n|$ et convergent aussi vers $|l|$
Exercice 02
Examiner la monotonie des suites suivantes, puis vérifier si sont elles bornées ?
$a_n = \dfrac{3n-1}{4n+1},\qquad b_n = -n^2(1-\dfrac{1}{n+1}),\qquad c_n = n^{-3},\qquad d_n = n^n - n!$
2)Etudier la nature des suites suivantes ;
$u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n},\quad u_n = \dfrac{1}{n^3}(1+2^2+...+n^2),\quad u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\quad u_n = 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^n},$
$u_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}\quad ,u_n = \dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n.(n+1)}/n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n = \dfrac{E((n+\frac{1}{2})^2)}{E((n-\frac{1}{2})^2)},$
$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{n}{n^2+k},\quad u_n = \dfrac{a^n+2b^n}{3a^n+4b^n}/(a>0),(b>0),\quad u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
Exercice 03
On considère la suite $(u_n)_n$ définie par
$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+u_n}, \forall n\in\mathbb{N}$$
et $u_0\in[0,1]$
1)Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in[0,1]$
2)Montrer que (u_n) est monotone, préciser les valeures de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) croissante, respectivement décroissante
3)Montrer que la suite (u_n) est convergente, sa limite dépend-elle de u_0 ?
Exercice 04
Montrer que si (u_n) une suite monotone et que $(u_{n_k}), k\in\mathbb{N}$ sous-suite convergente de (u_n) , alors (u_n) est aussi convergente.
Exercice 05
Soit (u_n) la suite définie par :
$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}; n\in\mathbb{N}^*$$
1)Montrer que (u_n) ne converge pas, que cette suite est bornée.
2)Peut-on extraire une sous-suite convergente ?.
Exercice 06
Soient (u_n) et (n_n) les deux suites réeles définies par :
$$u_0 = 1\qquad u_n = u_{n-1}+\frac{1}{n!}\qquad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$
Montrer que ces suites sont adjacents.
Exercice 07
Montrer
$$u_n = \cos\frac{1}{n}\qquad v_n = \frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+...+\frac{\sin n}{2^n}$$
sont de Cauchy.
Montrer que
$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$
n'est pas de cauchy.