Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Département d'Informatique
Module Analyse 1
Fiche TD 4

Part I

I Continuité

Exercice 1 Etudier la continuité des fonctions suivantes:

$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x, & |x|\leqslant 1 \\ |x-1| & |x|>1 \end{cases}$

$f(x)=\frac{1}{1+x^n},(x\geqslant 0)$, $f(x)=\begin{cases} x & |x|\leqslant 1 \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$

$f(x)=x-E(x)$

Exercice 2 Déterminer la valeur de a pour que les fonctions :

$f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ a+x & x\geqslant 0 \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} & x\neq 1 \\ a & x=1 \end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} x\ln x^2 & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$

soient continues au points indiquées.

Exercice 3 vérifiée si les fonctions suivantes sont prolongeable par continuité.

$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $f(x)=x^x(x>0)$, $f(x)=\frac{\tan 2x}{x}$

Part II

Dérivabilité

Exercice 1

1)Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes:

$f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ \ln(1+x) & x\geqslant 0 \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & |x|\leqslant 1 \\ |x|-1 & |x|>1 \end{cases}$

2)Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<e \\ a\ln x+b & x\geqslant e \end{cases}$$

soit dérivable au point $x=e$.

3)Trouver les couples $(a,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ pour que la fonction $f:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ avec

$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x} & x\in]0;x_0[\\ x^2+12 & x\in[x_0;+\infty[\end{cases}$$

soit de classe $C^1(]0;+\infty[)$.

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

$f(x)=\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$, $\quad f(x)=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$ $\qquad f(x)=\sin(\cos^2(\tan^2 x))$

$f(x)=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$

Exercice 3

Pour quelle conditions la fonction:

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x} & x\neq 0, n\in\mathbb{N} \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

1)Soit continue.

2)Soit dérivable.

3)A une dérivée continue.

Exercice 4

Calculer les limites des fonctions suivantes avec la régle d'Hopitâle.

$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}, x_0=0 \quad f(x)=\frac{\tan x-x}{x-\sin x}, x_0=0$