

Université Ibn Khaldoun de Taret  
 Département d'Informatique  
 Module Analyse 1  
 Fiche TD 3

*Exercice 1*

I) Montrer par la définition de la limite d'une fonction que

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{4x+9} = 5, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+x+1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} = -\infty$$

II) Soient  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction périodique de période  $T > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

Montrer que  $f$  est la fonction constante a valeur  $l$ .

III) Soit  $f$  une fonction définie par :  $f(x) = x^4 + 2x + 1$

1) Montrer que  $\forall x \neq 0$  avec  $|x| < 1$  on a  $|x^4 + 2x| < 3|x|$ .

2) Montrer à l'aide de la définition de la limite d'une fonction que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

*Exercice 2*

Calculer les limites suivantes (sans utiliser la règle d'Hopitalé)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}, \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right)+x}{E\left(\frac{1}{x}\right)-x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}, (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}.$$

*Exercice 3*

Avec les fonctions équivalentes, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin mx}, (k, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\sin 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$$