Chapitre I : Rappels mathématiques

Calcul vectoriel

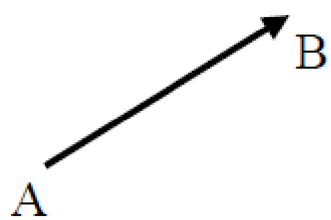
I- Notion de vecteur

1- Définition

Un scalaire est un nombre positif, négatif ou nul, utilisé pour représenter des quantités diverses : temps, température, masse, énergie, etc…

Un vecteur est caractérisé par quatre caractéristiques à savoir

L'origine A, le support la droite (AB), le sens de A vers B et le module. On le représente par un segment orienté. Il est défini par une direction, un sens sur cette direction et une longueur. Cette longueur n'est autre que la norme du vecteur.



$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

Deux vecteurs liés d'origine différentes, sont dits égaux lorsqu'ils ont la même direction, même sens et même module : ils représentent le même vecteur glissant. Deux vecteurs liés, d'origines quelconques, sont dits opposés lorsqu'ils ont la même direction, même grandeur et des sens opposés : ils sont dits directement opposés lorsqu'ils sont portés par la même droite.

2- Vecteur unitaire

Chaque vecteur peut être exprimé en fonction d'un vecteur unitaire $\vec{U}$ qui se différencier du vecteur porteur par son module qui est l'unité. $\|\vec{U}\| = 1$

Si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{U}$ alors on a : $\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|\ \vec{U}$

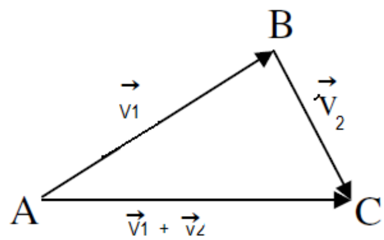
On note aussi $\|\overrightarrow{AB}\|$ par AB.

II -Opérations sur les vecteurs

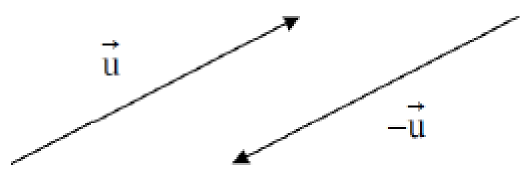
1- Addition de deux vecteurs

Des vecteurs peuvent être additionnés pour former un autre vecteur appelé vecteur somme ou vecteur résultant.

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$$

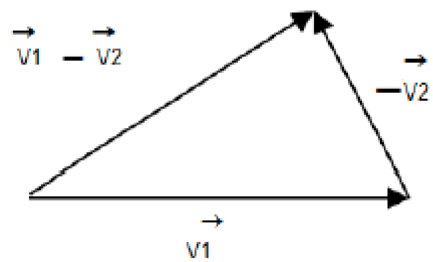


2- Soustraction de deux vecteurs



On ne sait pas faire la soustraction mais plutôt l'addition pour cela on fait la somme d'un vecteur avec l'inverse du vecteur qu'on veut soustraire de ce dernier.

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} + (-\overrightarrow{V_2})$$



III -Représentation d'un point

Pour pouvoir déterminer les coordonnées de n'importe quel vecteur, il faut choisir au préalable un repère qui est un couple de vecteurs non colinéaires appelé base. On peut alors décomposer tous les autres vecteurs du plan en fonction de ces deux vecteurs et cette décomposition est unique. Comme on a défini qu'un vecteur est formé par deux points, cela veut dire que sa représentation nécessite de repérer ces points.

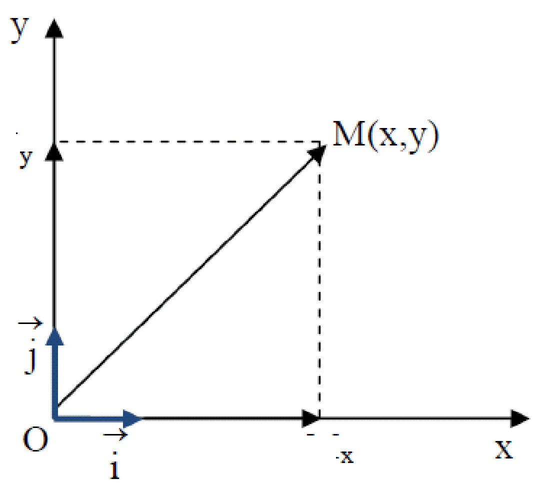
Pour repérer une position il faut choisir un repère. Les repères sont des trièdres orientés.

Système de coordonnées cartésiennes

Chaque position est repérée par ses coordonnées. S'il s'agit d'un repère linéaire par une seule coordonnée (x), d'un repère plan par deux coordonnées (x,y) et dans l'espace par trois coordonnées (x,y,z). ces coordonnées sont les projection de la position sur chaque axe doté d'un vecteur unitaire.

La position peut être exprimée par un vecteur position qui lie l'origine du repère choisi à la position. Le repère est orthonormé, c'est-à-dire que les vecteurs unitaires sont normés à l'unité et orthogonaux entre eux.

Cas d'une représentation à deux dimensions :



Dans ce repère orthonormé direct un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y) . Le vecteur position M s'écrit alors :

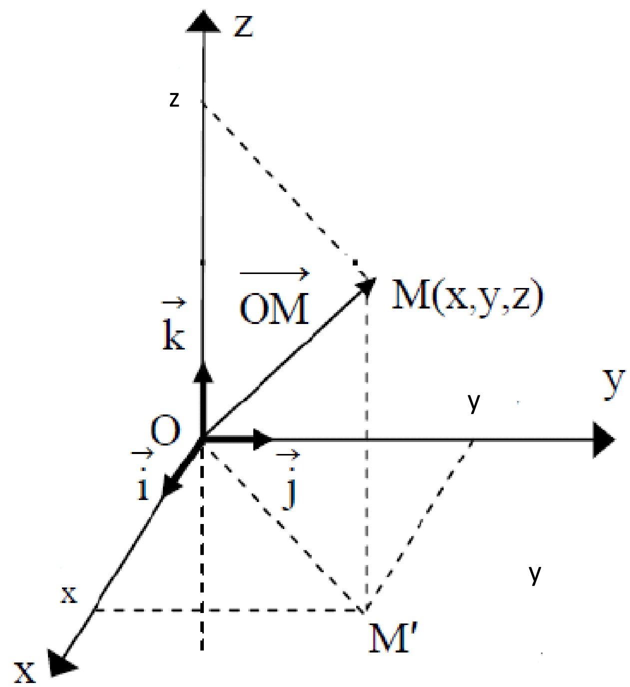
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OY} = \left\|\overrightarrow{OY}\right\|\vec{j} = y\,\vec{j} \quad et \quad \overrightarrow{OX} = \left\|\overrightarrow{OX}\right\|\vec{i} = x\,\vec{i}$$

Cas d'une représentation à trois dimensions (dans l'espace) :

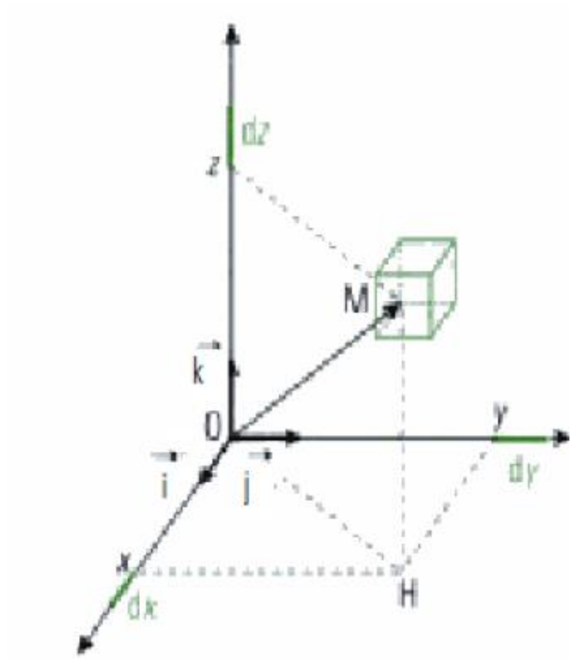
Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

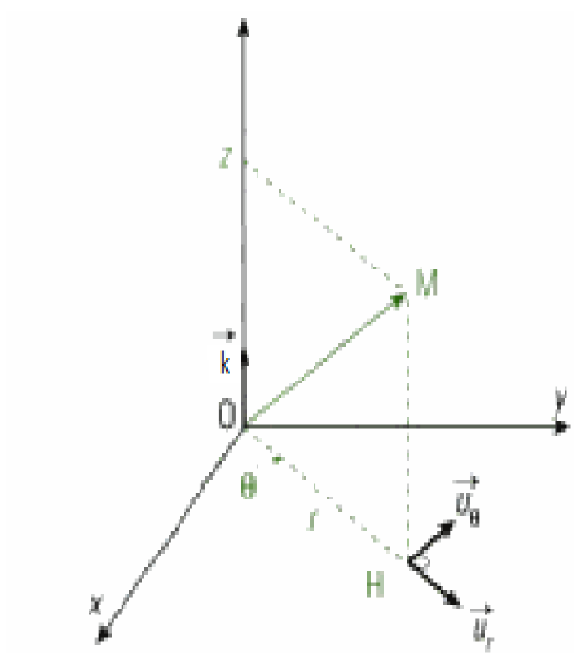


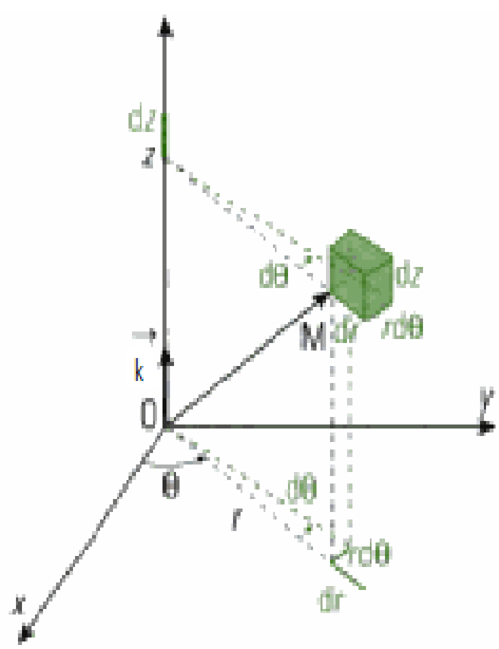
Lorsque les coordonnées x, y ou z de M subissent une variation élémentaire dx, dy ou dz, le point M se déplace respectivement de dx suivant (ox) , dy suivant (oy) ou dz suivant (oz). Ainsi, le volume élémentaire dV est petit parallélépipède rectangle d'arêtes dx, dy et dz

$dV=dx\ .\ dy\ .dz$



Coordonnées cylindrique





Si le mouvement du point M est circulaire dans le plan (XOY) et translate suivant l'axe (OZ) on repère la position M par les coordonnées cylindriques (r,θ, z).

- r : représente la distance du point M à l'axe Oz ;
- θ : Définit la position du point M autour de Oz (θ angle compris entre 0 et 2π) ;
- z : représente la cote du point M.

On définit la base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ avec ($\overrightarrow{u_z} = \vec{k}$) en posant :

$$\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OH}}{OH}$$

(H projection orthogonale du point M sur le plan (xOy). Le vecteur position du point M s'écrit alors :

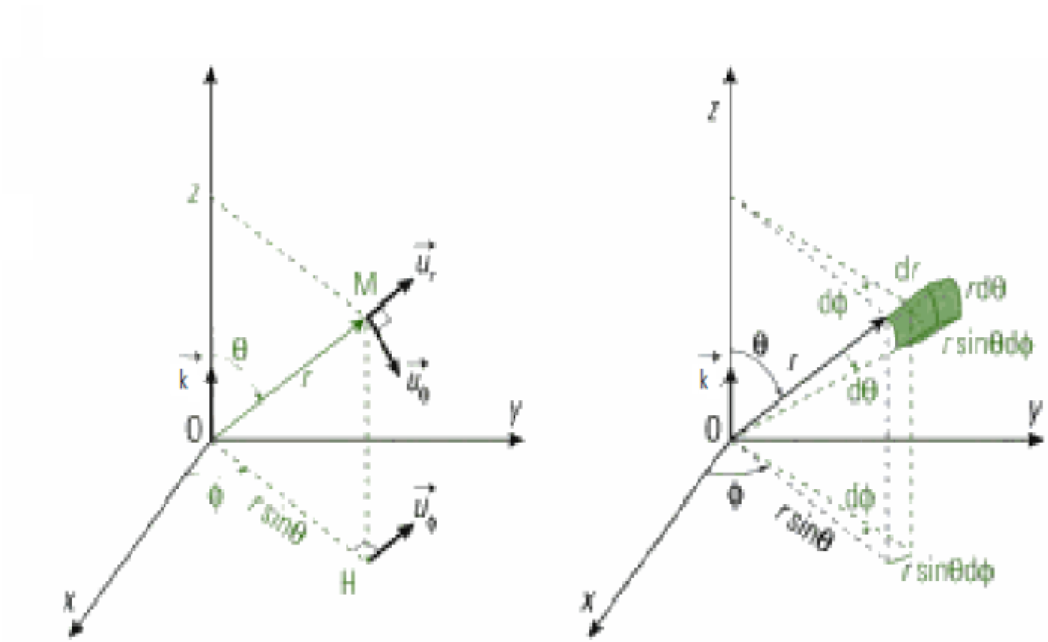
$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$$

Lorsque les coordonnées r, θ ou z de M subissent une variation élémentaire dr, d θ ou dz. Le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes dr, dθ et dz

dV= dr . dθ . dz

Coordonnées sphériques

Si le mouvement de M est circulaire suivant tous les axes on utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ)



- r : représente la distance du point M à l'origine O ;
- θ et φ : définissent la direction dans laquelle, depuis le point O, on voit le point M (θ angle compris entre O et π, φ angle compris entre 0 et 2π).

On définit la base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_\theta},\ \overrightarrow{u_\varphi})$ en posant :

$$\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

Le vecteur position du point M s'écrit alors :

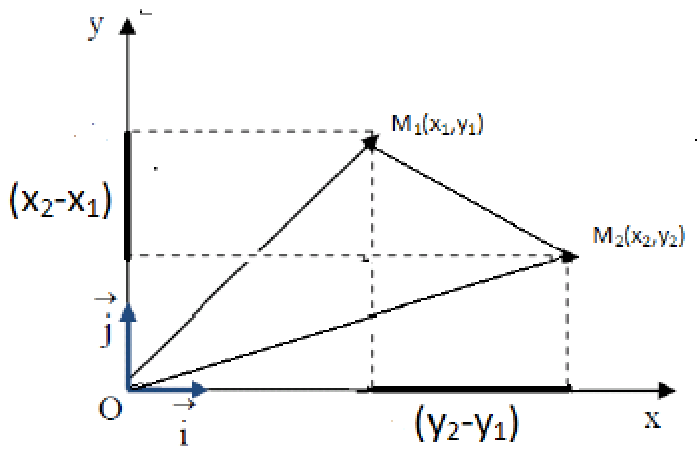
$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

Lorsque les coordonnées r, θ ou z de M subissent une variation élémentaire dr, d θ ou dφ. Le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes dr, r dθ et r sin(θ) dφ

$$\mathbf{dV=dr\ .\ r\ d\theta\ .\ r\ sin\theta\ \ d\phi}$$

Expression d'un vecteur dans une base cartésienne à deux dimensions

Soient deux positions M1(x1,y1) et M2(x2,y2), le vecteur formé par les deux points s'exprime par expression suivante



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

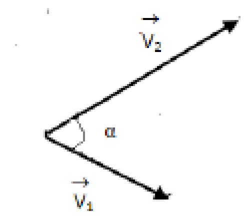
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} - (y_2 - y_1)\,\vec{\jmath}$$

Son module est :

$$\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

IV- Produit scalaire entre deux vecteurs

Soient deux vecteurs et leur produit scalaire est un produit qui donne comme résultat un scalaire



$$\vec{V_1}\,\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|\|\vec{V_2}\|\cos(\alpha)$$

Tel que α est l'angle entre les deux vecteurs

Ce produit admet quelques propriétés tel que :

$$\vec{\imath}\,\vec{\imath} = 1$$

$$\vec{\imath}\,\vec{\jmath} = 0$$

Calcul du module d'un vecteur

Soient Les coordonnées du vecteur $\vec{V_1}$ (x_1,y_1,z_1) et celle du vecteur $\vec{V_2}$ (x_2,y_2,z_2) :, Leur produit scalaire donne

$$\vec{V_1}\,.\vec{V_2} = (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}).\,(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k})$$

$$\vec{V_1}\,.\vec{V_2} = x_1.\,x_2 + y_1.\,y_2 + z_1.\,z_2$$

Si on remplace $\vec{V_2}$ par $\vec{V_1}$ on aura :

$$\vec{V_1}\,.\vec{V_1} = \|\vec{V_1}\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

D'où :

$$\|\vec{V_1}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

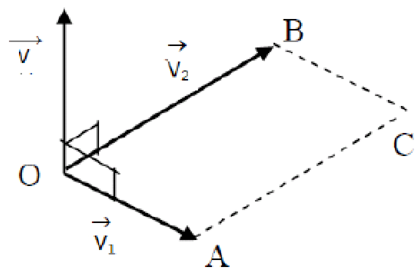
C'est la formule pour calculer le module d'un vecteur

V -Produit vectoriel

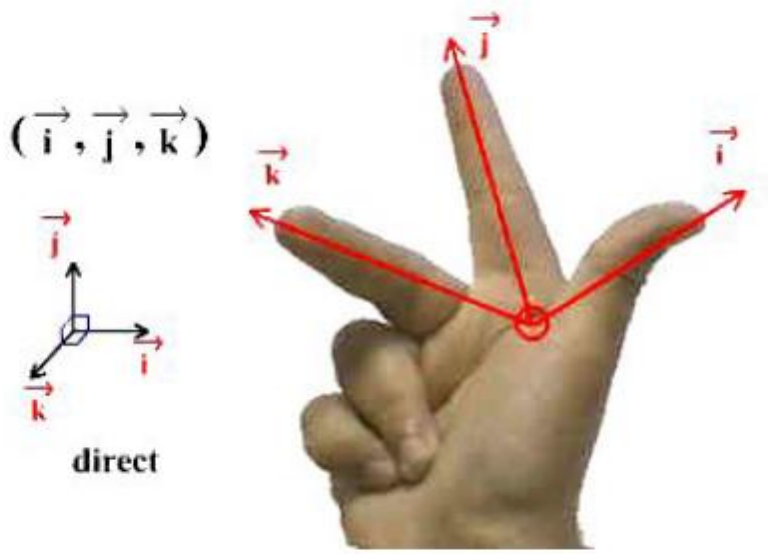
Soient deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, leur produit vectoriel est un vecteur $\vec{V}$ orienté tel que :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{V}$$

- la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$:



- le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite



- sa norme vaut:

$$\left\|\vec{V}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\| . \left\|\overrightarrow{V_2}\right\| \sin(\alpha)$$

Tel que α est l'angle entre les deux vecteurs

Propriétés:

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{0}$$

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$$

Le produit vectoriel peut être calculé par la méthode directe en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé direct :

$$\overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{V}_2 = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \wedge \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

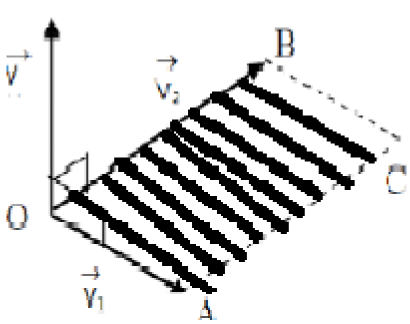
Il peut être aussi déterminer par la méthode du déterminant

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

Signification géométrique

Le module $\|\vec{V}\|$ correspond donc à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.

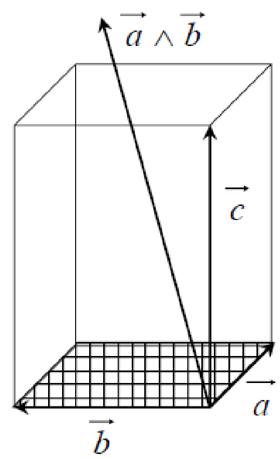


VI- Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ une quantité scalaire m égale au produit scalaire du troisième vecteur et du produit vectoriel des deux premiers :

$$m = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Ce produit mixte donne le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
Comme le volume du parallélépipède peut être évalué à partir d'un quelconque des faces, on a :



$m = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$m = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$

$m = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}$

Comme le produit scalaire est commutatif, on peut écrire :

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$ On peut donc intervertir la multiplication scalaire et la multiplication vectorielle.

VII- Fonction à plusieurs variables

En Physique, nous avons souvent à étudier les fonctions de plusieurs variables indépendantes.
Nous nous limiterons à trois notées *x* , *y et z* mais les résultats sont facilement généralisables.
Soit une fonction *f (x, y ,z)*, nous appellerons différentielle de *f* (notation *df*) la dérivée de f par rapport aux variables x, y et z et qui est donnée par l'expression suivante :

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} dz$$

Avec

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$: La dérivée partielle de f par rapport à x

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$: La dérivée partielle de f par rapport à y

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$: La dérivée partielle de f par rapport à z

A noter que la dérivée partielle de f(x, y, z) par rapport à une variable c'est la dérivée totale de f(x, y, z) par rapport à une variable en considérant les autres variables comme des constantes.

Il existe des fonctions algébriques et des fonctions vectorielles à plusieurs variables

- Fonction algébrique à une seule variable, c'est une fonction qui ne dépend que d'une seule variable :

$$y = f(x)$$

- Fonction à plusieurs variables qui dépendent de deux ou plusieurs variables

$$g = f(x, y) \text{ deux variables}$$

$$g = f(x, y, z) \text{ trois variables}$$

Sa différentielle totale s'écrit :

$$dg = df(x, y, z)$$

Exemple

Soit la fonction suivante

$$f(x,y,z)=x^2-yz$$

sa différentielle totale est :

$$df=2xdx-zdy-ydz.$$

On vient de définir des fonctions algébriques à plusieurs variables. Il existe aussi des fonctions vectorielles à plusieurs variables :

$$\vec{V} = f(x,y,z)\vec{\imath} + g(x,y,z)\vec{\jmath} + h(x,y,z)\vec{k}$$

$$\text{ou} \quad \vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k} \text{ avec :}$$

$$V_x = f(x,y,z)$$

$$V_y = g(x,y,z)$$

$$V_z = h(x,y,z)$$

Opérateurs

C'est des grandeurs mathématiques qui agissent sur ces fonctions.

L'opérateur nabla qui est un vecteur qui agit sur les fonctions

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

1. Lorsqu'il agit sur les fonctions algébriques, les transforme en fonctions vectorielles, et on appelle l'opérateur résultant dans ce cas l'opérateur **gradient** qu'on le note par grad(f)..

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \overrightarrow{grad} f(x,y,z)$$

2. Lorsqu'il agit sur les fonctions vectorielles, les transforme en scalaires, et on appelle l'opérateur résultant dans ce cas l'opérateur **<u>divergence</u>** qu'on le note par div($\vec{V}$) dans le cas où il agit sur une fonction vectorielle $\vec{V}$.

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}).((f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}))$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z} = div\vec{V}$$

3. Dans le cas où on fait un produit vectorielle entre nabla et une fonction vectorielle $\vec{V}$ il s'agit de l'opérateur **<u>rotationnel</u>** et qu'on le note par rot($\vec{V}$)

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array}$$