Université Ibn Khaldoun Tiaret **2020/2021**
Dept d'Informatique
Module: Electricité.

Solution TD N°03

Exercice 2

Une sphère de rayon R et de centre O, contient une distribution volumique de charges. La densité volumique n'étant fonction que de la distance r est définie par :

$\rho = b/r$ Avec : 0 < r < R et b = cte

Calculer en utilisant le théorème de Gauss, le champ électrique crée par la distribution dans tout l'espace (0< r < ∞).

Solution Exercice 02

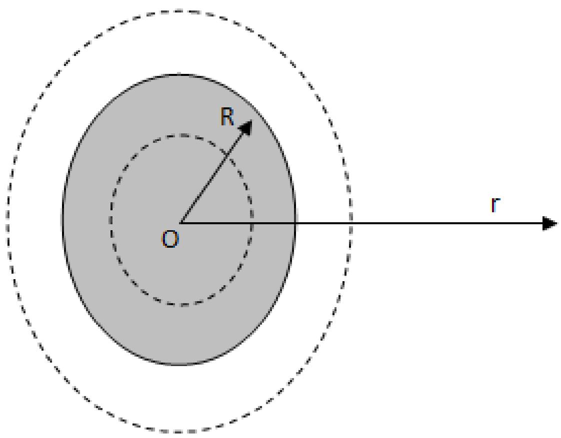
Une sphère de rayon R et de centre O, contient une distribution volumique de charges. La densité volumique n'étant fonction que de la distance r est définie par :

$\rho = b/r$ Avec : 0 < r < R et b = cte

Calculer en utilisant le théorème de Gauss, le champ électrique crée par la distribution dans tout l'espace (0< r < ∞).

Solution

Le champ crée par une sphère étant radial, nous choisirons une surface de Gauss sphérique de centre O.



Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = \iint_S d\vec{\Phi} = \iint_S \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

D'où

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

Nous désignerons deux cas :

a- 0 < r < R : nous avons $dq = \rho dv = \frac{b}{r} 4\pi r^2 dr = b4\pi r dr$

$$Q_i = \int_0^r dq = \int_0^r b4\pi r dr = 2\pi b r^2$$

D'où $$E = \frac{Q_i}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{2\pi b r^2}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{b}{2\varepsilon_0}}$$

b- r >R :

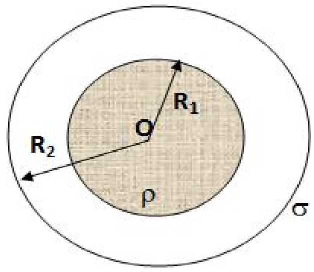
$$Q_i = \int_0^R dq = \int_0^R b4\pi r dr = 2\pi b R^2$$

D'où $$E = \frac{Q_i}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{2\pi b R^2}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{bR^2}{2r^2 \varepsilon_0}}$$

Exercice 3

On définit deux sphères concentriques (de même centre) de rayon R_1 et R_2 tels que $R_1<R_2$. La sphère de rayon R_1 est chargée en volume avec une répartition constante ρ , la sphère de rayon R_2 est chargée en surface avec une répartition surfacique σ .



1- Calculer le champ (E) crée en tout point de l'espace à laide du théorème de Gauss.

2- Tracer l'allure de E en fonction de r.

3- Calculer le potentiel (V) crée en tout point de l'espace à laide du théorème de Gauss.

4- Tracer l'allure de V en fonction de r.

Solution de l'exercice 03 :

1) Expressions des champs électrostatiques $\vec{E}(r)$ dans les trois cas :

Pour déterminer les expression des champs en utilisant théorème de Gauss.

Enoncé du théorème de Gauss : le flux du champ électrostatique $\vec{E}(r)$ sortant à travers toute surface fermée est égal à la charge contenue dans le volume délimité par la surface fermée, divisé par la permittivité du vide ε_0 , est donné par :

$$\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.dS.\vec{n} = \frac{\sum q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0}$$

Surface de Gauss considérée : est une sphère de rayon r , donc la surface d'une sphère de rayon r :

$$S_G = 4\pi r^2 .$$

Cas $r < R_1$ (Intérieur de la sphère de rayon R_1) :

D'après théorème de Gauss on a :

$$E\,S_G = \frac{\sum q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0}$$

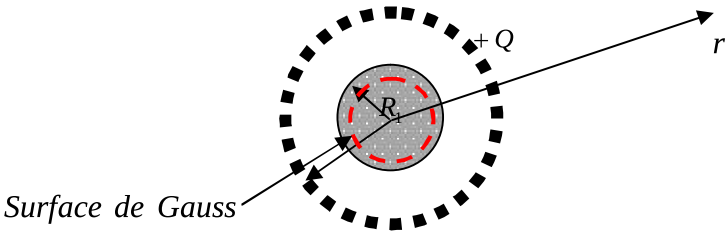


Figure 1 : *cas* $r < R_1$.

Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $r < R_1$:

$$Q_{\text{int}.S.Gasss} = \rho V = \frac{4\pi}{3}\rho r^3.$$

Soit :

$$E(r).4\pi r^2 = \frac{\frac{4\pi}{3}\rho r^3}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r.$$

Cas $R_1 < r < R_2$ **:**

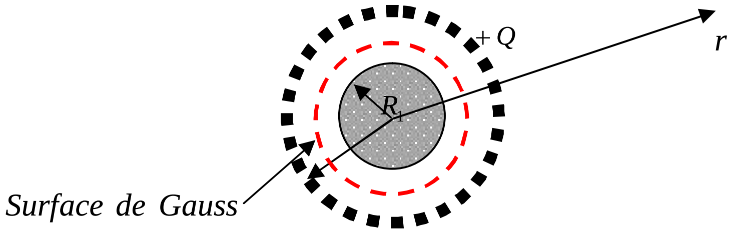


Figure 2 : *cas* $R_1 < r < R_2$.

Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $R_1 < r < R_2$:

$$Q_{\text{int}.S.Gasss} = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3.$$

Soit : $$E(r)4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi \rho R_1^3}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow E(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}.$$

Cas $r > R_2$ **(Extérieur d'une sphère de rayon** R_2 **):**

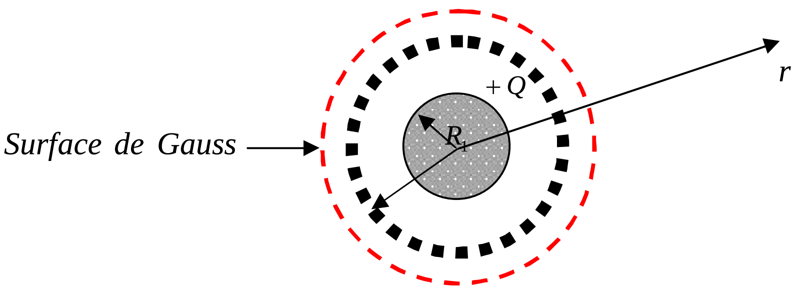


Figure 3 : *cas* $r > R_2$.

Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $r > R_2$:

$$Q_{\text{int}.S.Gasss} = \rho V + \sigma S \Leftrightarrow Q_{\text{int}.S.Gasss} = \frac{4}{3}\pi\rho R_1^3 + \sigma\,\pi R_2^2 .$$

$$\text{Soit : } E(r)4\pi r^2 = \frac{\sigma\,\pi R_2^2 + \frac{4}{3}\pi\rho R_1^3}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r) = \frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}.$$

2) L'allure de l'intensité du champ électrostatique dans les trois cas :

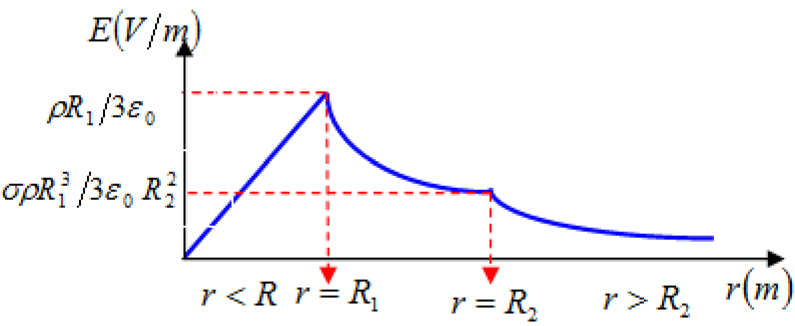


Figure 4 : *représentation graphique du champ.*

3) Expressions des potentiels électrostatiques $V(r)$ dans les trois cas :

Le potentiel en M se déduit de $E(r)$ par :

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}(V) \Rightarrow dV = -E(r)dr$$

Cas $r > R_2$ (à l'extérieur de la sphère de rayon R_2):

$$\text{D'où : } V(r) = \frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0}\int\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr = \frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_1$$

Lorsque: $r \to +\infty$ $V(r) \to 0$ alors $C_1 = 0$.

$$\text{Donc : } V(r) = \frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Cas $R_1 < r < R_2$:

$$V(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\int\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

Pour déterminer le constant C_2 en utilisant la continuité de potentiel à l'interface

$$\frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0} - \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}$$

Finalement : $V(r) = \frac{4\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}$

Cas $r < R_1$ (à l'intérieur de la sphère de rayon R_1) :

$$V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r^2 + C_3$$

Pour déterminer le constant C_3 en utilisant al continuité de potentiel à l'interface

$$\frac{4\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r^2 + C_3 \Rightarrow \frac{\rho R_1^2}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}$$

Finalement : $V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho R_1^2}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}$

4) L'allure du potentiel électrostatique dans les trois cas :

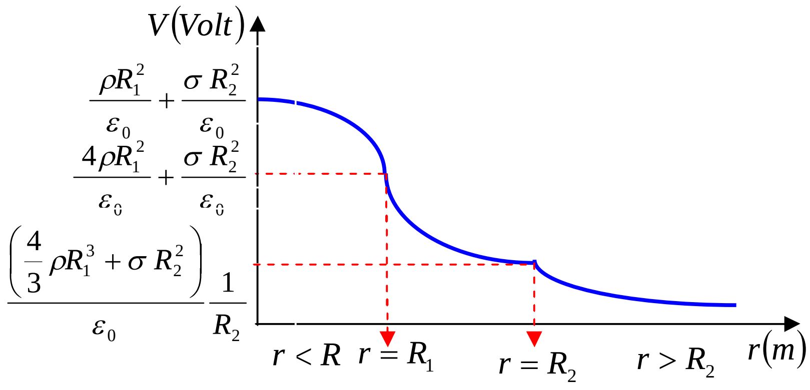


Figure 5 : *représentation graphique du potentiel.*