

Corrigé de l'examen final (2016 – 2017)

Exercice 01:(07pts)

1) $f(\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}) = \{\sqrt{\frac{3}{4}}, 0\}$ et $f^{-1}(\{\frac{1}{2}, 2\}) = \{-\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}\}$. 1pt+1pt

2) Etudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f .

2.1) Il suffit de prendre $x = -\frac{1}{2}$ et $x' = \frac{1}{2}$, on a:

$$f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{3}{4}} = f(\frac{1}{2}) \text{ et } -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}.$$

Alors f n'est pas injective. 0.75pt

2.2) Il suffit de prendre $y = 2$, il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 2$, car l'équation $\sqrt{1-x^2} = 2$ n'a pas de solution réelle.

Alors f n'est pas surjective. 0.75pt

3) Soit $g : [-1, 0] \rightarrow [0, 1]$ telle que $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

3.1) Soit $x, x' \in [-1, 0]$, on a:

$$\begin{aligned} g(x) = g(x') &\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x'^2} \\ &\Rightarrow x^2 = x'^2 \\ &\Rightarrow x = x', \text{ car } x, x' \text{ sont de même signe.} \end{aligned}$$

Alors f est injective. 1pt

3.2) Soit $y \in [0, 1]$, cherchons $x \in [-1, 0]$ tel que $y = g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{on a: } y = g(x) &\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \\ &\Rightarrow x^2 = 1-y^2 \\ &\Rightarrow (x = -\sqrt{1-y^2} \vee x = \sqrt{1-y^2}) \end{aligned}$$

Il suffit de prendre: $x = -\sqrt{1-y^2}$, car

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq -y^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-y^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow -1 \leq -\sqrt{1-y^2} \leq 0 \end{aligned}$$

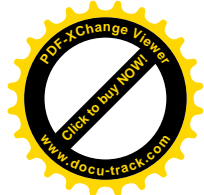
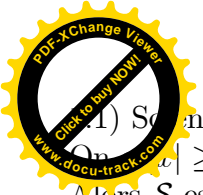
Alors f est surjective. 1pt+0.5pt

Par suite f est bijective.

4) $g^{-1} : [0, 1] \rightarrow [-1, 0]$ avec $g^{-1}(y) = x = -\sqrt{1-y^2}$. 1pt

Exercice 02:(06pts)

1) Montrer que \mathcal{S} est une relation d'ordre.



1.1) Soient $x \in \mathbb{R}$.

On a $|x| \geq |x|$ et $x^2 \geq 0$, donc $x\mathcal{S}x$.

Alors \mathcal{S} est reflexive. **1pt**

1.2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{On a } (x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}x) &\Rightarrow \begin{cases} |x| \geq |y| \text{ et } xy \geq 0 \\ |y| \geq |x| \text{ et } yx \geq 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow (|x| = |y| \text{ et } xy \geq 0) \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Alors \mathcal{S} est antisymetrique. **1pt**

1.3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{On a } (x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}z) &\Rightarrow \begin{cases} |x| \geq |y| \text{ et } xy \geq 0 \\ |y| \geq |z| \text{ et } yz \geq 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow (|x| \geq |z| \text{ et } xy^2z \geq 0) \end{aligned}$$

On étudie deux cas:

1er cas: Si $y \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} (|x| \geq |z| \text{ et } xy^2z \geq 0) &\Rightarrow (|x| \geq |z| \text{ et } xz \geq 0) \\ &\Rightarrow x\mathcal{S}z \end{aligned}$$

2e cas: Si $y = 0$, on a

$$\begin{aligned} \begin{cases} |x| \geq |y| \text{ et } xy \geq 0 \\ |y| \geq |z| \text{ et } yx \geq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 0 \text{ et } xy \geq 0 \\ 0 \geq |z| \text{ et } yz \geq 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 0 \text{ et } xy \geq 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow |x| \geq |z| \text{ et } xz \geq 0 \\ &\Rightarrow x\mathcal{S}z \end{aligned}$$

Alors \mathcal{S} est transitive. **1pt+1pt+1pt**

Par suite \mathcal{S} est une relation d'ordre.

2) Il suffit de prendre $x = 3$ et $y = -2$, on a:

$$|3| \geq |-2| \text{ et } 3(-2) \not\geq 0, \text{ c.à.d. } 3\mathcal{S}(-2)$$

$$\text{et } |-2| \not\geq |3| \text{ et } (-2)3 \not\geq 0, \text{ c.à.d. } (-2)\mathcal{S}3$$

Alors \mathcal{S} est un ordre partiel. **1pt**

Exercice 03:(07pts)

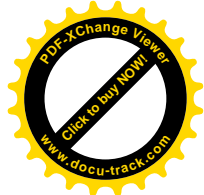
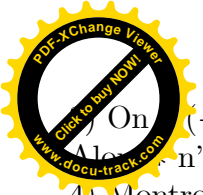
1) Vérifions que $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Soit $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, c.à.d $x, x' \in \mathbb{R}^*$ et $y, y' \in \mathbb{R}$,

donc $xx' \in \mathbb{R}^*$ et $yx' + y'x^2 \in \mathbb{R}$, d'où $(x, y) * (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Alors $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. **0.5pt**

2) $(-1, 1) * (-1, 2) = (1, 1)$ et $(-1, 2) * (-1, 1) = (1, -1)$. **1pt**



On a $(-1, 1) * (-1, 2) \neq (-1, 2) * (-1, 1)$,

Alors $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ n'est pas commutative. **0.5pt**

4) Montrons que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

4.1) Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') &= (xx', yx' + y'x^2) * (x'', y'') \\ &= (xx'x'', (yx' + y'x^2)x'' + y''(xx')^2) \\ &= (xx'x'', yx'x'' + y'x^2x'' + y''x^2x'^2) \\ (x, y) * ((x', y') * (x'', y'')) &= (x, y) * (x'x'', y'x'' + y''x'^2) \\ &= (xx'x'', yx'x'' + (y'x'' + y''x'^2)x^2) \\ &= (xx'x'', yx'x'' + y'x''x^2 + y''x'^2x^2) \\ &= ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') \end{aligned}$$

Alors la loi $*$ est associative dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. **1pt+1pt**

4.2) Cherchons $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, vérifiant

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} : (x, y) * (e_1, e_2) = (x, y)$ et $(e_1, e_2) * (x, y) = (x, y)$

On a $(x, y) * (e_1, e_2) = (x, y) \Leftrightarrow (xe_1, ye_1 + e_2x^2) = (x, y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xe_1 = x \\ ye_1 + e_2x^2 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

Il suffit de prendre $(e_1, e_2) = (1, 0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

On a: $(x, y) * (1, 0) = (x \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot x^2) = (x, y)$ et

$(1, 0) * (x, y) = (1 \cdot x, 0 \cdot x + y \cdot 1^2) = (x, y)$

Alors $(1, 0)$ est l'élément neutre de la loi $*$ dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. **1pt+0.5pt**

4.3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, cherchons $(x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, vérifiant:

$(x, y) * (x', y') = (1, 0)$ et $(x', y') * (x, y) = (1, 0)$

$$\text{On a } (x, y) * (x', y') = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ yx' + y'x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ y' = -\frac{y}{x^3} \end{cases}$$

Il suffit de prendre $(x', y') = (\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

On a: $(x, y) * (\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3}) = (x \cdot \frac{1}{x}, y \cdot \frac{1}{x} + (-\frac{y}{x^3})x^2) = (1, 0)$ et

$(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3}) * (x, y) = (\frac{1}{x}x, (-\frac{y}{x^3})x + y(\frac{1}{x})^2) = (1, 0)$

Alors $(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3})$ est l'élément inverse de (x, y) par rapport à la loi $*$ dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. **1pt+0.5pt**

Par suite $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ est un groupe.