Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 1 ($\mathbf{S}_1-\mathbf{1}^{ère}$ Année LMD, MI)

Corrigé de l'examen final **(2016 − 2017)**

Exercice 01:(07pts)

1) $f\left(\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\}\right)=\left\{\sqrt{\frac{3}{4}},0\right\}$ et $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2},2\right\}\right)=\left\{-\sqrt{\frac{3}{4}},\sqrt{\frac{3}{4}}\right\}$. 1pt+1pt

2) Etudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

2.1)Il suffit de prendre $x=-\frac{1}{2}$ et $x'=\frac{1}{2}$, on a:

$f(-\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{3}{4}}=f(\frac{1}{2})$ et $-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$.

Alors f n'est pas injective. 0.75pt

2.2) Il suffit de prendre $y=2$, il n'existe aucun $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=2$, car l'équation $\sqrt{1-x^2}=2$ n'a pas de solution réelle.

Alors f n'est pas surjective. 0.75pt

3) Soit $g:[-1,0]\to[0,1]$ telle que $g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

3.1) Soit $x,x'\in[-1,0]$, on a:

$$\begin{aligned} g(x)=g(x') &\Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x'^2}\\ &\Rightarrow x^2=x'^2\\ &\Rightarrow x=x' \text{ , car } x,x' \text{ sont de même signe.}\end{aligned}$$

Alors f est injective. 1pt

3.2) Soit $y\in[0,1]$, cherchons $x\in[-1,0]$ tel que $y=g(x)$.

on a: $$\begin{aligned} y=g(x) &\Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}\\ &\Rightarrow x^2=1-y^2\\ &\Rightarrow \left(x=-\sqrt{1-y^2}\vee x=\sqrt{1-y^2}\right)\end{aligned}$$

Il suffit de prendre: $x=-\sqrt{1-y^2}$, car

$$\begin{aligned} 0\leq y\leq 1 &\Rightarrow -1\leq -y^2\leq 0\\ &\Rightarrow 0\leq\sqrt{1-y^2}\leq 1\\ &\Rightarrow -1\leq-\sqrt{1-y^2}\leq 0\end{aligned}$$

Alors f est surjective. 1pt+0.5pt

Par suite f est bijective.

4) $g^{-1}:[0,1]\to[-1,0]$ avec $g^{-1}(y)=x=-\sqrt{1-y^2}$. 1pt

Exercice 02:(06pts)

1) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

1.1) Soient $x \in \mathbb{R}$.
On a $|x| \geq |x|$ et $x^2 \geq 0$, donc $x\mathcal{S}x$.
Alors $\mathcal{S}$ est reflexive. 1pt
1.2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{On a} \quad (x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}x) \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x| \geq |y| \ \text{ et } xy \geq 0 \\ |y| \geq |x| \ \text{ et } yx \geq 0 \end{array} \right. \\ \Rightarrow (|x| = |y| \ \text{ et } xy \geq 0) \\ \Rightarrow x = y \end{array}$$

Alors $\mathcal{S}$ est antisymetrique. 1pt
1.3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{On a} \quad (x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}z) \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x| \geq |y| \ \text{ et } xy \geq 0 \\ |y| \geq |z| \ \text{ et } yz \geq 0 \end{array} \right. \\ \Rightarrow (|x| \geq |z| \ \text{ et } xy^2z \geq 0) \end{array}$$

On étudie deux cas:
1er cas: Si $y \neq 0$, on a

$$(|x| \geq |z| \ \text{ et } xy^2z \geq 0) \quad \begin{array}{l} \Rightarrow (|x| \geq |z| \ \text{ et } xz \geq 0) \\ \Rightarrow x\mathcal{S}z \end{array}$$

1er cas: Si $y = 0$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| \geq |y| \ \text{ et } xy \geq 0 \\ |y| \geq |z| \ \text{ et } yx \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x| \geq 0 \text{ et } xy \geq 0 \\ 0 \geq |z| \ \text{ et } yz \geq 0 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} |x| \geq 0 \text{ et } xy \geq 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \\ \Rightarrow |x| \geq |z| \ \text{ et } xz \geq 0 \\ \Rightarrow x\mathcal{S}z \end{array}$$

Alors $\mathcal{S}$ est transitive. 1pt+1pt+1pt
Par suite $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
2) Il suffit de prendre $x = 3$ et $y = -2$, on a:
$|3| \geq |-2|$ et $3(-2) \ngeq 0$, c.à.d: $3 \not\mathcal{S} (-2)$
et $|-2| \ngeq |3|$ et $(-2)\,3 \ngeq 0$, c.à.d: $(-2) \not\mathcal{S} 3$
Alors $\mathcal{S}$ est un ordre partiel. 1pt

Exercice 03:(07pts)

1) Vérifions que $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
Soit $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, c.à.d $x, x' \in \mathbb{R}^*$ et $y, y' \in \mathbb{R}$,
donc $xx' \in \mathbb{R}^*$ et $yx' + y'x^2 \in \mathbb{R}$, d'où $(x, y) * (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
Alors $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. 0.5pt
2) $(-1, 1) * (-1, 2) = (1, 1)$ et $(-1, 2) * (-1, 1) = (1, -1)$. 1pt

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

3) On a $(-1,1)*(-1,2)\neq(-1,2)*(-1,1)$,
Alors $*$ n'est pas commutative. 0.5pt
4) Montrons que $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},*)$ est un groupe commutatif.
4.1) Soient $(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
((x,y)*(x',y'))*(x'',y'') &= (xx',yx'+y'x^2)*(x'',y'')\\
&= \left(xx'x'',(yx'+y'x^2)\,x''+y''\,(xx')^2\right)\\
&= (xx'x'',yx'x''+y'x^2x''+y''x^2x'^2)\\
(x,y)*((x',y')*(x'',y'')) &= (x,y)*(x'x'',y'x''+y''x'^2)\\
&= (xx'x'',yx'x''+(y'x''+y''x'^2)\,x^2)\\
&= (xx'x'',yx'x''+y'x''x^2+y''x'^2x^2)\\
&= ((x,y)*(x',y'))*(x'',y'')
\end{aligned}$$

Alors la loi $*$ est associative dans $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. 1pt+1pt
4.2) Cherchons $(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, vérifiant
$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}:(x,y)*(e_1,e_2)=(x,y)$ et $(e_1,e_2)*(x,y)=(x,y)$

$$\text{On a}\quad (x,y)*(e_1,e_2)=(x,y)\quad\Leftrightarrow (xe_1,ye_1+e_2x^2)=(x,y)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} xe_1=x\\ ye_1+e_2x^2=y\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases} e_1=1\\ e_2=0\end{cases}$$

Il suffit de prendre $(e_1,e_2)=(1,0)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ et soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.
On a: $(x,y)*(1,0)=(x.1,y.1+0.x^2)=(x,y)$ et
$(1,0)*(x,y)=(1.x,0.x+y.1^2)=(x,y)$
Alors $(1,0)$ est l'élément neutre de la loi $*$ dans $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.1pt+0.5pt
4.3) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, cherchons $(x',y')\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, vérifiant:
$(x,y)*(x',y')=(1,0)$ et $(x',y')*(x,y)=(1,0)$

$$\text{On a}\quad (x,y)*(x',y')=(1,0)\quad\Leftrightarrow\begin{cases} xx'=1\\ yx'+y'x^2=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases} x'=\frac{1}{x}\\ y'=-\frac{y}{x^3}\end{cases}$$

Il suffit de prendre $(x',y')=\left(\frac{1}{x},-\frac{y}{x^3}\right)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.
On a: $(x,y)*\left(\frac{1}{x},-\frac{y}{x^3}\right)=\left(x\frac{1}{x},y\frac{1}{x}+\left(-\frac{y}{x^3}\right)x^2\right)=(1,0)$ et
$\left(\frac{1}{x},-\frac{y}{x^3}\right)*(x,y)=\left(\frac{1}{x}x,\left(-\frac{y}{x^3}\right)x+y\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)=(1,0)$
Alors $\left(\frac{1}{x},-\frac{y}{x^3}\right)$ est l'élément inverse de (x,y) par rapport à la loi $*$ dans $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. 1pt+0.5pt
Par suite $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},*)$ est un groupe.