Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 1 ($\mathbf{S}_1$−$\mathbf{1}^{ère}$ Année LMD, MI) **Durée: 01**^{h}:30^m

***Examen de rattrapage* (2016 − 2017)**

Exercice 01:(06pts)
Soit S la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : aSb \Leftrightarrow \frac{a+2b}{3} \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que S est une relation d'équivalence.
Déterminer les classes d'équivalence de: -1; 0 et 1.

Exercice 02:(06pts)
1) Montrer que $\forall p, p' \in \mathbb{N}^* - \{1\} : -\frac{1}{2} < \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} < \frac{1}{2}$.
2) Soit $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}^* - \{1\}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'application définie par: $f(p, q) = p + \frac{1}{q}$.
2.1) Déterminer $f\{(-2, 2); (0, 3)\}$ et $f^{-1}\{1\}$.
2.2) Montrer que f est injective.
2.3) f est-elle bijective? (justifier).

Exercice 03:(08pts) Soit Δ la loi de composition définie sur $]1, +\infty[$ par:

$$\forall x, y \in]1, +\infty[: x\Delta y = (x-1)(y-1) + 1$$

1) Vérifier que Δ est une loi interne.
2) Montrer que $(]1, +\infty[, \Delta)$ est un groupe commutatif.
3) Est ce que $\left(\left\{\frac{4}{3}; \frac{3}{2}; 2; 3; 4\right\}, \Delta\right)$ est un sous groupe du groupe $(]1, +\infty[, \Delta)$.

Bon courage.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 1 (S_1−$1^{ère}$ Année LMD, MI)

***Corrigé de l'examen de rattrapage* (2016 − 2017)**

Exercice 01:(06pts)

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$, on a: $\frac{a+2a}{3} = a \in \mathbb{Z}$, c.à.d aSa.
Alors S est reflexive.———————————————————**(01pts)**

2) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, on a:

$$\begin{aligned} aSb &\Longrightarrow \tfrac{a+2b}{3} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a+2b = 3k, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow a = 3k-2b, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow 2a = 6k-4b, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow b+2a = 3(2k-b), \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow \tfrac{b+2a}{3} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow bSa \end{aligned}$$

Alors S est symetrique.———————————————————**(02pts)**

2) Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$, on a:

$$\begin{aligned} aSb \wedge bSc &\Longrightarrow \left(\tfrac{a+2b}{3} \in \mathbb{Z}\right) \wedge \left(\tfrac{b+2c}{3} \in \mathbb{Z}\right) \\ &\Longrightarrow \tfrac{a+2b}{3} + \tfrac{b+2c}{3} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \tfrac{a+2c}{3} + b \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow \tfrac{a+2c}{3} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow aSc \end{aligned}$$

Alors S est transitive.———————————————————**(01pts)**
Par suite S est une relation d'équivalence.

2) $\overset{\bullet}{\widehat{(-1)}} = \{a \in \mathbb{Z} : aS(-1)\}$
$aS(-1) \Leftrightarrow \frac{a-2}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 3k+2$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors $\overset{\bullet}{\widehat{(-1)}} = \{3k+2 : k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}+2$.——————————————**(01pts)**

$\overset{\bullet}{0} = \{a \in \mathbb{Z} : aS0\}$
$aS0 \Leftrightarrow \frac{a+0}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 3k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors $\overset{\bullet}{0} = \{3k : k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$.———————————————————**(0,5pts)**

$\overset{\bullet}{1} = \{a \in \mathbb{Z} : aS1\}$
$aS1 \Leftrightarrow \frac{a+2}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 3k-2$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors $\overset{\bullet}{1} = \{3k-2 : k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}-2 = 3\mathbb{Z}+1$.——————————————**(0,5pts)**

Exercice 02:(06pts)

1) Soient $p, p' \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, c.à.d: $p \geq 2$ et $p' \geq 2$, donc
$0 < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{p'} \leq \frac{1}{2}$, d'où $0 < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{p'} < 0$,
alors $-\frac{1}{2} < \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} < \frac{1}{2}$.—————————————————**(01pts)**

2) $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}^* - \{1\}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par: $f(p,q) = p + \frac{1}{q}$.
2.1) $f\{(-2,2),(0,3)\} = \left\{\frac{-3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$.—————————————————**(01pts)**
On a: $p + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{q} = 1 - p \Longrightarrow \frac{1}{q} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (q = 1 \vee q = -1)$
mais $q = 1 \vee q = -1$ est impossible car $q \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.
Alors $f^{-1}\{1\} = \phi$.—————————————————**(01pts)**

2.2) Soient $(p,q)\,;\,(p',q') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}^* - \{1\})$, on a:

$$\begin{aligned}
f(p,q) = f(p',q') &\Longrightarrow p + \frac{1}{q} = p' + \frac{1}{q'} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{q} - \frac{1}{q'} = p' - p \\
&\Longrightarrow \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q'} = p' - p\right) \wedge \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q'}\right) \in \mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q'} = 0\right) \wedge (0 = p' - p)\text{, d'après la 1ère question.} \\
&\Longrightarrow (p' = p) \wedge (q = q') \Longrightarrow (p,q) = (p',q')
\end{aligned}$$

Alors f est injective.—————————————————**(02pts)**

2.3) D'après la question 2) $f^{-1}\{1\} = \phi$, alors f n'est pas surjective, donc elle n'est pas bijective.—————————————————**(01pts)**

Exercice 03:(08pts)

1) Soient $x, y \in]1, +\infty[$; c,à,d $x - 1 > 0$ et $y - 1 > 0$, donc $(x-1)(y-1) > 0$, d'où $(x-1)(y-1) + 1 > 1$, c,à,d $x \Delta y \in]1, +\infty[$.
Alors Δ est une loi interne.—————————————————**(01pts)**

2) Montrons que $(]1, +\infty[, \Delta)$ est un groupe commutatif.
2.1) Soient $x, y \in]1, +\infty[$, on a:
$y \Delta x = (y-1)(x-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1 = x \Delta y$.
Alors Δ est commutative.—————————————————**(01pts)**

2.2) Soient $x, y, z \in]1, +\infty[$, on a:
$(x\Delta y)\Delta z = ((x-1)(y-1)+1)\Delta z = (x-1)(y-1)(z-1)+1$
$x\Delta(y\Delta z) = x\Delta((y-1)(z-1)+1) = (x-1)(y-1)(z-1)+1 = (x\Delta y)\Delta z$
Alors Δ est associative.—————————————————**(01,5pts)**

2.3) Cherchons $e \in]1, +\infty[$, tel que $\forall x \in]1, +\infty[: e\Delta x = x \Delta e = x$.

$$\begin{aligned}
\text{On a: } x\Delta e = x &\Longleftrightarrow (x-1)(e-1)+1 = x \Longleftrightarrow (x-1)(e-1) = x - 1 \\
&\Longleftrightarrow e - 1 = 1 \Longleftrightarrow e = 2.
\end{aligned}$$

Puisque $2 \in]1, +\infty[$ et Δ est commutative, alors $e = 2$ est l'élément neutre de la loi Δ.—————————————————**(01,5pts)**

2.4) Soit $x \in]1,+\infty[$, cherchons $x' \in]1,+\infty[$, tel que $x'\Delta x = x\Delta x' = 2$.

On a: $x\Delta x' = 2 \iff (x-1)(x'-1)+1 = 2 \iff (x-1)(x'-1) = 1$
$\iff x' = \frac{1}{x-1} + 1.$

Puisque $\frac{1}{x-1} + 1 \in]1,+\infty[$ et Δ est commutative, alors $x' = \frac{1}{x-1} + 1$ est le symétrique de x par rapport à la loi Δ.——————————————————**(01,5pts)**

Par suite $(]1,+\infty[\,,\Delta)$ est un groupe commutatif.

3) On a: $e = 2 \in]1,3[$.

Il suffit de prendre $x = \frac{8}{2} \in]1,3[$ et $y = \frac{5}{2} \in]1,3[$; on a:

$x\Delta y^{-1} = 3\Delta(4)^{-1} = 3\Delta\left(\frac{1}{4-1}+1\right) = 3\Delta\left(\frac{4}{3}\right) = (3-1)\left(\frac{4}{3}-1\right)+1 = \frac{5}{3} \notin \left\{\frac{4}{3};\frac{3}{2};2;3;4\right\}$

Alors $\left(\left\{\frac{4}{3};\frac{3}{2};2;3;4\right\},\Delta\right)$ n'est pas un sous groupe du groupe $(]1,+\infty[\,,\Delta)$.— **(01,5pts)**