Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

Département d'Informatique.

Module:Algèbre 2 ($\mathbf{S_2}$−$\mathbf{1}^{ère}$ Année LMD, MI) **Durée: $\mathbf{01}^h$:30^m**

Examen Final **(2016 − 2017)**

Exercice 01:(05pts)

Sur $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on définit les deux lois $\boxplus$ et $\odot$ par
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall (x, y), (x', y') \in E$:
$(x, y) \boxplus (x', y') = (xx', yy')$ et $\alpha \odot (x, y) = (x^\alpha, y^\alpha)$.
On admet que $(E, \boxplus)$ est un groupe commutatif.
Montrer que $(E, \boxplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 02:(08pts)

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :
$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 0, x + y - z + t, t)$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\ker f$ et sa dimension.
3. Donner la dimension de $\operatorname{Im} f$ est dire si f est surjective?
4. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et donner sa dimension.
5. E et $\ker f$ sont-ils supplémentaires?

Exercice 03:(07pts)

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que $B' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de B à B'. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice A' de g dans la base B'.
4. Calculer A'. En déduire A'^{4n}, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Bon courage.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 2 ($S_2-1^{ère}$ Année LMD, MI)

Corrigé de l'examen final (2016 − 2017)

Exercice 01:(05pts)

1) $(E, \boxplus)$ etant un groupe commutatif, il reste à vérifier les propriétés liées à la deuxème loi $\odot$.

2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(x,y), (x',y') \in E$.

2.0) On a $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $x^\alpha, y^\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; c,à,d: $(x^\alpha, y^\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* = E$.
Alors la loi $\odot$ est une loi externe dans E à coefficients dans $\mathbb{R}$..........*1pt*

2.1) $\alpha \odot ((x,y) \boxplus (x',y')) = \alpha \odot (xx', yy') = ((xx')^\alpha, (yy')^\alpha)$
$= (x^\alpha x'^\alpha, y^\alpha y'^\alpha) = (x^\alpha, y^\alpha) \boxplus (x'^\alpha, y'^\alpha)$
$= \alpha \odot (x,y) \boxplus \alpha \odot (x',y')$.........*1pt*

2.2) $(\alpha+\beta) \odot (x,y) = \left(x^{(\alpha+\beta)}, y^{(\alpha+\beta)}\right) = \left(x^\alpha x^\beta, y^\alpha y^\beta\right)$
$= (x^\alpha, y^\alpha) \boxplus \left(x^\beta, y^\beta\right)$
$= \alpha \odot (x,y) \boxplus \beta \odot (x,y)$.........*1pt*

2.3) $(\alpha.\beta) \odot (x,y) = \left(x^{(\alpha.\beta)}, y^{(\alpha.\beta)}\right) = \left(\left(x^\beta\right)^\alpha, \left(y^\beta\right)^\alpha\right)$
$= \alpha \odot \left(x^\beta, y^\beta\right)$
$= \alpha \odot (\beta \odot (x,y))$.........*1pt*

2.4) $1 \odot (x,y) = (x^1, y^1) = (x,y)$.........*1pt*
Par suite $(E, \boxplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 02:(08pts)

1) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z,t), (x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$. On a:
$f(\alpha(x,y,z,t) + \beta(x',y',z',t')) = f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t')$
$= (\alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y' + \alpha z + \beta z', 0, \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' - \alpha z - \beta z' + \alpha t + \beta t', \alpha t + \beta t')$
$= (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 0, \alpha x + \alpha y - \alpha z + \alpha t, \alpha t) + (\beta x' - \beta y' + \beta z', 0, \beta x' + \beta y' - \beta z' + \beta t', \beta t')$
$= \alpha(x - y + z, 0, x + y - z + t, t) + \beta(x' - y' + z', 0, x' + y' - z' + t', t')$
$= \alpha f(x,y,z,t) + \beta f(x',y',z',t')$................*1.5pt*
Alors f est linéaire.

2) $\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : f(x,y,z,t) = 0\}$

On a $f(x,y,z,t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ t = 0 \end{cases}$

$\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = t = 0 \text{ et } y = z\}$

Soit $(x, y, z, t) \in \ker f$,
On a $(x, y, z, t) = (0, z, z, 0) = z\,(0, 1, 1, 0)$
Il est clair que $(0, 1, 1, 0) \in \ker f$, donc $\{(0, 1, 1, 0)\}$ est une partie génératrice de $\ker f$.
Puisque $(0, 1, 1, 0) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ alors $\{(0, 1, 1, 0)\}$ est libre.
Par suite $\{(0, 1, 1, 0)\}$ est une base de $\ker f$ et $\dim \ker f = 1$.................*01+0.5pt*
3) On a $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f = 4 - 1 = 3$.
$\dim \operatorname{Im} f \neq \dim \mathbb{R}^4$, alors f n'est pas surjective.................*0.5+0.5pt*
4) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0\}$
4.1) On a $0 + 0 - 0 + 0 = 0$, alors $0_{\mathbb{R}^4} \in E$. On a
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z, t), (x', y', z', t') \in E$. On a
$\alpha\,(x, y, z, t) + \beta\,(x', y', z', t') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t')$ et

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' - \alpha z - \beta z' + \alpha t + \beta t' &= \alpha\,(x + y - z + t) + \beta\,(x' + y' - z' + t') \\ &= \alpha\,(0) + \beta\,(0) = 0, \end{aligned}$$

alors $\alpha\,(x, y, z, t) + \beta\,(x', y', z', t') \in E$.
Par suite E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$..................*0.5+01pt*
4.2) Soit $(x, y, z, t) \in E$; c,à,d $z = x + y + t$.

$$\begin{aligned} \text{On a}\quad (x, y, z, t) &= (x, y, x + y + t, t) = (x, 0, x, 0) + (0, y, y, 0) + (0, 0, t, t) \\ &= x\,(1, 0, 1, 0) + y\,(0, 1, 1, 0) + t\,(0, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

Il est clair que $(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \in E$,
alors $A = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ est une partie génératrice de E.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$;

$$\text{On a } \lambda_1\,(1, 0, 1, 0) + \lambda_2\,(0, 1, 1, 0) + \lambda_3\,(0, 0, 1, 1) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Alors A est libre.
Par suite A est une base de E et $\dim E = 3$..................*01+0.5pt*
5) On remarque que $(0, 1, 1, 0) \in \ker f \cap E$, donc $\ker f \cap E \neq \{0\}$,
d'où E et $\ker f$ ne sont pas supplémentaires..................*01pt*

Exercice 03:(07pts)

1) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 \Rightarrow \lambda_1\,(e_1 - e_2 + e_3) + \lambda_2\,(2e_1 - e_2 + e_3) + \lambda_3\,(2e_1 - 2e_2 + e_3) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3)\,e_1 + (-\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)\,e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,e_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Alors B' est une partie libre.

Puisque B' est libre dans $\mathbb{R}^3$ et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, alors B' est libre maximale, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ ....*01+0.5pt*

2) $P = Mat_{Id}(B', B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ car $\begin{array}{c} Id(a) = a = e_1 - e_2 + e_3 \\ Id(b) = b = 2e_1 - e_2 + e_3 \\ Id(c) = c = 2e_1 - 2e_2 + e_3 \end{array}$ *01pt*

Soit $P' = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}$

$$P'P = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x' - y' + z' = 0 \\ 2x' - y' + z' = 1 \\ 2x' - 2y' + z' = 0 \\ x'' - y'' + z'' = 0 \\ 2x'' - y'' + z'' = 0 \\ 2x'' - 2y'' + z'' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \\ x' = 1 \\ y' = 1 \\ z' = 0 \\ x'' = 0 \\ y'' = -1 \\ z'' = -1 \end{cases}$$

$P^{-1} = P' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P'P = I_3$.................*01+0.5pt*

3) $A' = P^{-1}AP$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.....*01+0.5pt*

$$A'^4 = A'^2 A'^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$A'^{4n} = (I_3)^n = I_3$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.................*01+0.5pt*