Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 2 ($S_2-1^{ère}$ Année LMD, MI) **Durée: 01^h:15^m**

***Examen Final* (2015 − 2016)**

***Exercice* 01(15*pts*):**

Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par:
$f(e_1) = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$ et $f(e_3) = 2e_1 + 2e_2 - e_3$.
Soit $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 3u\}$ et $E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = -3u\}$.

1ère partie (09pts)

1) Déterminer $E_1 \cap E_2$.
2) On admet que E_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que $\{e_1 + e_2 + e_3\}$ est une base de E_1. Montrer que E_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. et que $\{e_2 - e_1, e_3 - e_1\}$ est une base de E_2.
3) Est-ce-que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? (Justifier votre réponse).
4) Déterminer la matrice A associée à f relativement à la base B.

2ème partie (06pts)

5) Soit $B' = \{e_2 - e_1, e_3 - e_1, e_1 + e_2 + e_3\}$ la nouvelle base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de passage P de B à B', puis calculer P^{-1}.
6) Détermminer la matrice A' associée à f relativement à la base B'.
7) Détermminer la matrice C associée à $f \circ f$ relativement à la base B'.
8) En déduire A'^{-1}en fonction de A'.

***Exercice* 02(05*pts*)**

On considère l'application $g : \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$ donnée par
$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R}) : g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

1) Donner une base de $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$ (sans démonstration).
2) Vérifier que g est une application linéaire de $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$.
3) Calculer la dimension de $\ker g$ et la dimension de $\operatorname{Im} g$.
4) Est-ce-que g est un automorphisme de $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$?(Justifier votre réponse).

Bon courage.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 2 ($\mathbf{S}_2$−$\mathbf{1}^{ère}$ Année LMD, MI)

$\boldsymbol{Corrigé\ de\ l'examen\ final}$ $\mathbf{(2015-2016)}$

Exercice 01:(15pts)

1ère partie (09pts)

1) $$\begin{aligned} u\in E_1\cap E_2 &\Leftrightarrow (f(u)=3u \text{ et } f(u)=-3u)\\ &\Leftrightarrow (f(u)=3u \text{ et } 3u=-3u)\\ &\Leftrightarrow (f(u)=3u \text{ et } u=0)\end{aligned}$$

Donc $E_1\cap E_2=\{0\}$

2) On a $f(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}=-3\times 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $0_{\mathbb{R}^3}\in E_2$.

Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et soit $u,u'\in E_2$, on a:
$f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)=\alpha(-3u)+\beta(-3v)=-3(\alpha u+\beta v)$,
d'où $\alpha u+\beta v\in E_2$.
par suite, E_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit $u\in E_2$, c.à.d $f(u)=-3u$.
Comme $u\in\mathbb{R}^3$, alors $u=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$ avec $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$,
ainsi

$$\begin{aligned} f(u)=-3u &\Leftrightarrow f(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)=-3(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)\\ &\Leftrightarrow a_1f(e_1)+a_2f(e_2)+a_3f(e_3)=-3(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)\\ &\Leftrightarrow (a_1(-e_1+2e_2+2e_3)+a_2(2e_1-e_2+2e_3)+a_3(2e_1+2e_2-e_3))\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad =-3(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)\\ &\Leftrightarrow (2a_1+2a_2+2a_3)e_1+(2a_1+2a_2+2a_3)e_2+(2a_1+2a_2+2a_3)e_3=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1+2a_2+2a_3=0\\ 2a_1+2a_2+2a_3=0\\ 2a_1+2a_2+2a_3=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1=-a_2-a_3\\ \quad a_2\in\mathbb{R}\\ \quad a_3\in\mathbb{R}\end{cases}\end{aligned}$$

mais, $$\begin{aligned} u &= a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3=(-a_2-a_3)e_1+a_2e_2+a_3e_3\\ &= a_2(e_2-e_1)+a_3(e_3-e_1) \text{ avec } a_2,a_3\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{On a:}\quad f(e_2-e_1) &= f(e_2)-f(e_1)=(2e_1-e_2+2e_3)-(-e_1+2e_2+2e_3)\\ &= -3(e_2-e_1),\\ \text{et}\quad f(e_3-e_1) &= f(e_3)-f(e_1)=(2e_1+2e_2-e_3)-(-e_1+2e_2+2e_3)\\ &= -3(e_3-e_1)\end{aligned}$$

d'où $e_2-e_1, e_3-e_1 \in E_2$, donc $\{e_2-e_1, e_3-e_1\}$ est une partie génératrice de E_2.

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned}\lambda_1(e_2-e_1)+\lambda_2(e_3-e_1)=0 &\Rightarrow (-\lambda_1-\lambda_2)e_1+\lambda_1e_2+\lambda_2e_3=0\\ &\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0\end{aligned}$$

Alors $\{e_2-e_1, e_3-e_1\}$ est une partie libre.
Par suite $\{e_2-e_1, e_3-e_1\}$ est une base de E_2.

3) Comme $E_1\cap E_2=\{0\}$, alors $E_1+E_2=E_1\oplus E_2$ (la somme est directe).
et on a $\dim E_1=1$ et $\dim E_2=2$.
On sait que $\dim(E_1+E_2)=\dim E_1+\dim E_2-\dim(E_1\cap E_2)=3=\dim\mathbb{R}^3$.
Par coséquent $E_1+E_2=\mathbb{R}^3=E_1\oplus E_2$, d'où E_1et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4) $A=Mat_f(B,B)=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$ car $\begin{cases}f(e_1)=-e_1+2e_2+2e_3\\f(e_2)=2e_1-e_2+2e_3\\f(e_3)=2e_1+2e_2-e_3\end{cases}$

2ème partie (06pts)

5) $B'=\{e_2-e_1, e_3-e_1, e_1+e_2+e_3\}$ la nouvelle base de $\mathbb{R}^3$.

$P=Mat_{Id}(B',B)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ car $\begin{cases}Id(e_2-e_1)=e_2-e_1=-e_1+e_2+0e_3\\Id(e_3-e_1)=e_3-e_1=-e_1+0e_2+e_3\\Id(e_1+e_2+e_3)=e_1+e_2+e_3\end{cases}$

Supposons $H=\begin{pmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\\a''&b''&c''\end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

On a: $H.P = I_3 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -a+b=1 \\ -a+c=0 \\ a+b+c=0 \\ -a'+b'=0 \\ -a'+c'=1 \\ a'+b'+c'=0 \\ -a''+b''=0 \\ -a''+c''=0 \\ a''+b''+c''=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=1+a=\frac{2}{3} \\ c=a=-\frac{1}{3} \\ a=-\frac{1}{3} \\ b'=-\frac{1}{3} \\ c'=1+a'=\frac{2}{3} \\ a'=-\frac{1}{3} \\ b''=a''=\frac{1}{3} \\ c''=a''=\frac{1}{3} \\ a''=\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

d'où $P^{-1} = H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $A' = Mat_f(B', B') = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ car

$$\left\{ \begin{array}{l} f(e_2-e_1) = -3(e_2-e_1) = -3(e_2-e_1) + 0(e_3-e_1) + 0(e_1+e_2+e_3) \\ f(e_3-e_1) = -3(e_3-e_1) = 0(e_2-e_1) - 3(e_3-e_1) + 0(e_1+e_2+e_3) \\ f(e_1+e_2+e_3) = 3(e_1+e_2+e_3) = 0(e_2-e_1) + 0(e_3-e_1) + 3(e_1+e_2+e_3) \end{array} \right.$$

6') 2ème méthode:

$A' = Mat_f(B', B') = (Mat_{Id}(B', B))^{-1}.Mat_f(B, B)\, Mat_{Id}(B', B)$

$$= P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) $C = Mat_{f \circ f}(B', B') = (Mat_f(B', B'))^2 = A'^2 = 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 9I_3.$

8) On a: $A'^2 = 9I_3$ donc $\left(\frac{1}{9}A'\right) A' = I_3$ d'où $A'^{-1} = \frac{1}{9}A'$.

Exercice 02:(05pts)

1) Une des base de $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$ est $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

2) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$ .On a:

$$g\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)=g\begin{pmatrix} \alpha a+\beta a' & \alpha b+\beta b' \\ \alpha c+\beta c' & \alpha d+\beta d' \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha d+\beta d' & -\alpha b-\beta b' \\ -\alpha c-\beta c' & \alpha a+\beta a' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha d & -\alpha b \\ -\alpha c & \alpha a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta d' & -\beta b' \\ -\beta c' & \beta a' \end{pmatrix}$$

$$=\alpha\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix}=\alpha g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\beta g\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Alors g est linéaire.

3) $\ker g=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R}) : g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases} d=0 \\ -b=0 \\ -c=0 \\ a=0 \end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} d=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ a=0 \end{cases}$$

alors $\ker g=\left\{0_{\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})}\right\}$ et $\dim\ker g=0$

On a aussi $\dim\operatorname{Im} g=\dim\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})-\dim\ker g=4-0=4.$

4) On a $\ker g=\left\{0_{\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})}\right\}$, alors g est injective et $\dim\operatorname{Im} g=\dim\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$, donc $\operatorname{Im} g=\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$, alors g est surjective.
Par suite g est un automorphisme.