Université Ibn Khaldoun – Tiaret
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de l'Informatique
Module : Algèbre 01 (1ère Année LMD 2016-2017)

Fiche de TD n° 01

EXERCICE 01 :

Les propositions suivantes sont elles vraies?

$P_1 : ((2+5=6) \vee (1+3 \geq 2)) \Rightarrow (4-7=-2)$

$P_2 : ((2+2 \leq 0) \Rightarrow (1=3)) \wedge (7 = |-7|)$

$P_3 : ((2+5=6) \vee (1+3>2)) \Rightarrow (\overline{4-7=-2})$

$P_4 : ((2+5=7) \Leftrightarrow (\overline{1+3<6})) \Rightarrow (4 \text{ divise } 12)$

$P_5 : \left((0 \text{ divise } 5) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{3} = 0.66 \right) \vee (1=4) \right) \right) \wedge \left(\overline{\sqrt{3} = 1.73} \right)$

Ecrire les négations de ces propositions

EXERCICE 02 :

Soient P, Q et R des propositions. Montrer qu'on a les équivalences suivantes :

1) $(\overline{P \vee Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$

2) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$

3) $((P \vee Q) \wedge R) \Leftrightarrow ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R)))$

4) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

EXERCICE 03 :

Ecrire les négations des énoncés suivants et dire s'ils sont vrais ou faux.

$P_1 : \exists x \in \mathbb{R}^+,\ x^3 - 2\sqrt{2} = 0$

$Q_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \geq 0$

$P_2 : \forall q \in \mathbb{Q},\ q + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

$Q_2 : \exists n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R},\ x^n = 0$

$P_3 : \forall n \in \mathbb{N},\ ((n \geq 2) \vee (2 \text{ divise } n))$

$Q_3 : \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ x \leq n$

$P_4 : \exists a \in \mathbb{Z},\ ((a \text{ est impair}) \wedge (a < 0))$

$Q_4 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ x \leq n$

EXERCICE 04:

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1) f s'annule
2) f est la fonction nulle
3) f n'est pas une fonction constante
4) f ne prend jamais deux fois la même valeur
5) f est positive
6) f est bornée

EXERCICE 05 :

1) Montrer, par l'absurde, que $\frac{\mathrm{Ln}(5)}{\mathrm{Ln}(4)}$ est un nombre irrationnel.
2) Soient k et k' deux entiers naturels non nuls, Montrer par contraposée que : $(kk' = 1) \Rightarrow (k = k' = 1)$
3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par disjonction des cas que $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 4.

EXERCICE 06 :

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a^2 est pair si et seulement si a est pair.
2) Sachant que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
   Montrer, que l'ensemble $\boldsymbol{P}$ des nombres premiers est infini.
3) Soit a et b deux nombres réels. Posons $a * b = a + b + ab$.
   Montrer que $\forall a \in \mathbb{R},\ (a*a)*a = a^3 + 3a^2 + 3a.$
   Montrer que $\exists a \in \mathbb{R},\ a*a = a.$