Université Ibn Khaldoun – Tiaret
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de l'Informatique
Module : Algèbre 01 (1ère Année LMD 2016-2017)

Fiche de TD n° 02

EXERCICE 01 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

a) Montrer que : 1) $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$

2) $A = B \Leftrightarrow C_E A = C_E B$

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) $C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$

b) Soit $f : E \to E$ une application . Montrer que :

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
5. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
6. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

A quelle condition sur f, on a $A = f^{-1}(f(A))$.

EXERCICE 02 :

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications. Montrer que :

1) (f et g sont bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective) et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
2) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
3) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective
4) $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives $\Rightarrow f, g$ *et* h sont bijectives

EXERCICE 03 :

Les applications suivantes sont elles-bien définies ? Si oui, sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2 \qquad g_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2 \qquad g_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad g_4 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2.$$

EXERCICE 04 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

1) Déterminer $f\left(\left\{-1; 0; \frac{1}{2}; 2\right\}\right)$, $f^{-1}(\{2;1\})$.

2) f est-elle injective ? Est-elle surjective?

3) Montrer que l'équation $f(x) = y$ a des solutions x si et seulement si $y \in [-1;1]$.

En déduire que $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$.

4) Montrer que la restriction $g : [-1;1] \to [-1;1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.