Université Ibn Khaldoun de Tiaret. **Département d'Informatique**
Module:Algèbre 2 ($1^{ère}$ Année LMD)

Fiche de T.D N^0 **2** (2016-2017)

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par: $f(x, y, z, t) = (y, x + z - y, 3t - z)$
Montrer que f, est une application linéaire, puis calculer $\dim \ker f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.

Exercice 2: Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, définie par: $f(z) = (\overline{z_1} + z_2, -\overline{z_2})$;
Montrer que f n'est pas linéaire si on considère $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{C}-$espace vectoriel et que f est linéaire si on considère $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
Déterminer $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2$, $\dim_{\mathbb{R}} (\ker f)$ et $\dim_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} f)$. En déduire si f est injective ou surjective.

Exercice 3: Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base d'un espace vectoriel réel E et soit φ l'endomorphisme de E défini par: $\varphi(e_1) = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$,
$\varphi(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$ et $\varphi(e_3) = 2e_1 + 2e_2 - e_3$.
1) Soit $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3, \varphi(u) = -3u\}$ .Montrer que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que $E_1 = \langle e_2 - e_1, e_3 - e_1 \rangle$.
2) Soit $E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 3u\}$.
Est-ce-que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E?

Exercice 4(supplémentaire) :
Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définies par: $f(P) = P + (1 - X) P'$
Est ce que f est un automorphisme?
($\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; \deg P \leq 2\}$ et P' est le pàlynome dérivé de P)

Exercice 5(supplémentaire):
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f : E \to E$
une application linéaire. Montrer que: $\ker f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow (f \circ f \equiv 0 \text{ et } n = 2rg(f))$