Université Ibn Khaldoun de Tiaret. Département d'Informatique.

Fiche de T.D N^0 3 (Algèbre 2)

Exercice 1: Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1) Caluler, si c'est possible, $(A+B)^t(A-B)$, A^2, ${}^tBB$, ${}^tBB - A^tA$

2) Trouver les matrices inverses de $\frac{1}{4}(A+B)^t(A-B)$ et ${}^tBB$ (si elles existent).

Exercice 2: Donner les matrices associées à chacune des applications linéaires suivantes, relativement aux bases canoniques de leurs espaces de départ et d'arrivée.

$f :: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, et $f_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, ($\mathbb{C}^2$ étant un $\mathbb{R}$ espace vectoriel),

définies par: $f(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z)$ et $f_1(z_1,z_2) = (\overline{z_1} + z_2, -\overline{z_2})$

Exercice 3: Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3, h(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base a.

2) Soient $b = (0,1,1)$ et $c = (1,1,2)$. Montrer que $\beta' = (a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Déterminer la matrice de passage P de β à β', puis calculer P^{-1}.

4) Déterminer la matrice D de h dans la base β'.

Exercice 4: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par: $f(P) = (1+X)P'$

1) Déterminer la matrice B associée à f relativement à la bases $\beta' = \left(1, 1+X, (1+X)^2\right)$.

2) Déterminer la matrice B associée à $f \circ f \circ f$ relativement à la bases β'.

3) Calculer le rang de f. Est ce que f est un automorphisme? (justifier)

Exercice 5: Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $\det A$, $\det B$, $\det C$, $\det(2A)$, $\det(2C)$, $\det(BC)$, $\det(B+C)$,

Exercice 6 (supplémentaire): Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

1) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$ et donner une base de E.

2) Soit $f : E \longrightarrow E$ définie par $f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b \\ b & a+b+c \end{pmatrix}$;
Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice suivant la base trouvée, la dimension de son noyau et son rang.
Est-ce que la matrice de f est inversible?