Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 2 (1ère Année LMD)

Fiche de T.D N^0 1 (2014-2015)

Exercice 1: Est-ce que $(\mathbb{R}^2, +, \boxdot)$ est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel pour les lois $+$ et $\boxdot$ suivantes:
$\forall\alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\alpha \boxdot (x, y) = (\alpha x, 0)$?

Exercice 2: Est-ce que $\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \triangle, \odot\right)$est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois $\triangle$et$\odot$ suivantes: $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$
$(x, y) \triangle (x', y') = (x + x', yy')$ et $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, y^\alpha)$?

Exercice 3:: Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Dans le cas affirmatif, trouver des bases.
$W_0 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4/3x - 2y + 2z = 0 \text{ et } 2y = t\}$ $\quad W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4/2xy - t = 0\}$
$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4/2x - y - t = 0\}$

Exercice 4: Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathrm{Im}\,P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un sous espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Même question pour l'ensemble $\mathcal{F}_-(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions négatives de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Exercice 6: Soit $A = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^3$ telle que $u = (2, 1, 1)$ et $v = (1, 3, 1)$.
1) Montrer que A est une partie libre de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer le réel α pour que $w = (-2, \alpha, \alpha + 2) \in Gr(A)$ puis compléter A pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7: Soit $\mathbb{R}_3[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \deg P \leq 3\}$.
1) Donner la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.
2) Montrer que $A = \{1 + X, 2 + 3X, 1 - X + 2X^2\}$ est une partie libre de $\mathbb{R}_3[X]$, puis compléter A pour obtenir une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 8: Soient les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants:
$W_0 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4/3x - 2y + 2z = 0 \text{ et } 2y = t\}$ $\quad W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4/2x - y - t = 0\}$
$W_3 = \langle (0, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 2, 2, 1) \rangle$
1) W_0 et W_2 sont-ils supplémentaires l'un de l'autres?
2) Même question pour W_0 et W_3.