1. Cours 1: Notions de logique.

1.1. Calcul propositionnel:

1.1.1. Notion de proposition:

On appelle proposition tout énoncé pouvant être vrai ou faux.

Exemples:

Je suis un être humain.	(cet enoncé est vrai donc c'est une proposition)
Comment allez vous?	(cet enoncé n'est ni vrai ni faux donc ce n'est pas une proposition)
$1 \times 1 = 1$ et $1 + 1 = 1$	(cet enoncé est faux donc c'est une proposition)
L'entier a divise 2	(cet enoncé n'est ni vrai ni faux donc ce n'est pas une proposition)

Les propositions sont souvent notées P, Q, R, P', ...etc.
A partir d'une ou plusieurs propositions, on peut en construire d'autres. C'est l'objet des paragraphes suivants.

1.1.2. La négation:

La négation d'une proposition P est la propostion notée $\overline{P}$ et qui est vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie.

Exemple:

Si on note P : " Je suis un être humain."
Q : " ce tableau est blanc."
Alors $\overline{P}$: " Je ne suis pas un être humain."
$\overline{Q}$: " Ce tableau n'est pas blanc."
Attention, $\overline{Q'}$ n'est pas " Ce tableau est noir. "
Remarque: $\overline{P}$ est aussi notée $\rceil P$ est se lit : Non P.

1.1.3. La conjonction:

La conjonction des deux propositions P et Q est la proposition notée $P \wedge Q$ et qui est vraie si P et Q sont simultanément vraies et fausse dans les autres cas.

Exemple:

Si on note P : " Je suis un être humain."
Q : " Ce tableau est blanc."
$P \wedge Q$: " Je suis un être humain. *et* ce tableau est blanc."(cette proposition est fausse)
$P \wedge \overline{Q}$: " Je suis un être humain. *et* ce tableau n'est pas blanc."(cette proposition est vraie)

1.1.4. La disjonction:

La disjonction des deux propositions P et Q est la proposition notée $P \vee Q$ et qui est fausse si P et Q sont simultanément fausses et vraie dans les autres cas.

Exemple:

Si on note P : " Je suis un être humain."

Q : " Ce tableau est blanc."

$P \vee Q$: " Je suis un être humain *ou* ce tableau est blanc."(cette proposition est vraie)

$\overline{P} \vee Q$: " Je ne suis pas un être humain *ou* ce tableau est blanc."(cette proposition est fausse)

1.1.5. L'implication:

L'implication des deux propositions P puis Q est la proposition notée $P \Rightarrow Q$ et qui est fausse si P est vraie et Q est fausse et vraie dans les autres cas.

Exemple:

Si on note P : " $3 = 7 - 4$ "

Q : " $7 = 4 - 3$ "

$P \Rightarrow Q$: " $3 = 7 - 4$" *implique* "$7 = 4 - 3$" (cette proposition est fausse)

$Q \Rightarrow P$: "$7 = 4 - 3$" *implique* " $3 = 7 - 4$"(cette proposition est vraie)

Remarque: $P \Rightarrow Q$: se lit aussi : Si P alors Q.

1.1.6. L'équivalence:

L'équivalence des deux propositions P et Q est la proposition notée $P \Leftrightarrow Q$ et qui est vraie si P et Q sont simultanéments vraies ou simultanément fausses et fausse dans les autres cas.

Exemple:

Si on note P : " $3 = 7 - 4$ "

Q : " $7 = 4 - 3$ "

$P \Leftrightarrow Q$: " $3 = 7 - 4$" *équivalent à* "$7 = 4 - 3$" (cette proposition est fausse)

$\overline{Q} \Leftrightarrow P$: "$7 \neq 4 - 3$"*équivalent à* " $3 = 7 - 4$"(cette proposition est vraie)

Remarque: $P \Leftrightarrow Q$: se lit aussi : P si et seulement si Q.

1.2. Calcul des prédicats:

1.2.1. Notion de prédicat:

On appelle prédicat tout énoncé dépendant d'une ou plusieurs variables et qui devient une proposition quand on remplace les variables par des valeurs concretes.

Exemples:

L'entier a divise 2	(cet enoncé est un prédicat)
Le réel x est supérieur à 0	(cet enoncé est un prédicat)
La différence des deux entiers n et m est un multiple de 3.	(cet enoncé est un prédicat)
Où est l'étudiant x?	(cet enoncé n'est pas un prédicat)

Les prédicats sont souvent notées $P(x)\,,\ Q(x,y)\,,\ R(z)\,,\ P'(x,y,z)\,,$...etc.
A partir d'un ou plusieurs prédicats, on peut en construire d'autres en utilisant la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence.

Exemples:

$(x^2 = 1) \Rightarrow (x = 1) \vee (x = -1)$
$[(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 0)] \Rightarrow (x = 0)$
$|x| = |y| \Leftrightarrow [(x = y) \vee (x = -y)]$

1.2.2. Les quantificateurs:

Soit $P(x)$ un prédicat et A un ensemble non vide.
1) L'expression «Tout élement x de A, vérifie $P(x)$» s'écrit en abrégé:«$\forall x \in A,\ P(x)$»
2) L'expression «Il existe au moins un élement x de A qui vérifie $P(x)$» s'écrit en abrégé: «$\exists x \in A, P(x)$»

Exemples:

«$\forall x \in \mathbb{Z},\ x = x^3$» veut dire «Tout élément x de $\mathbb{Z}$, vérifie $x = x^3$» qui est fausse car $2 \neq 2^3$.
«$\exists x \in \mathbb{N},\ x - 4 > 0$» veut dire «Il existe au moins un élément x de $\mathbb{N}$, qui vérifie $x - 4 > 0$» qui est vraie car $5 - 4 > 0$.
«$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$» veut dire « Au moins un élément x de $\mathbb{R}$, vérifie $x^2 < 0$ » qui est fausse car on ne peut pas trouver un réel x vérifiant $x^2 < 0$.
«$\forall a \in \mathbb{N},\ 1$ divise a » veut dire « Tout élément a de $\mathbb{N}$ vérifie 1 divise a » qui est vraie car tous les entiers naturels sont divisibles par 1
$\exists x \in \mathbb{R},\ x < y$. Cette expression est un prédicat $Q(y)$.

Remarque:

1) $\forall$ s'appelle le quantificateur universel et $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.
2) « $\forall x \in A,\ P(x)$» se lit « Pour tout x de A, $P(x)$» ou aussi « Quel que soit x de A, $P(x)$»
3) $\overline{\forall x \in A,\ P(x)}$ est $\exists x \in A,\ \overline{P(x)}$
4) $\overline{\exists x \in A,\ P(x)}$ est $\forall x \in A,\ \overline{P(x)}$

Exemles:

$\overline{\forall x \in \mathbb{Z},\ x = x^3}$ est $\exists x \in \mathbb{Z},\ x \neq x^3$
$\overline{\exists x \in \mathbb{N},\ x - 4 > 0}$ est $\forall x \in \mathbb{N},\ x - 4 \leq 0$
$\overline{\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R},\ x < y}$ est $\exists y \in \mathbb{Z}, \overline{\exists x \in \mathbb{R},\ x < y}$ donc c'est $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq y$

Propriétés:

Soient $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ trois prédicats et A un ensemble non vide. On a les propriétés suivantes:

On écrit $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ si $\forall x \in A, (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$

1) $\overline{\overline{P}}(x) \Leftrightarrow P(x)$

2) $[P(x) \wedge P(x)] \Leftrightarrow P(x)$ et $[P(x) \vee P(x)] \Leftrightarrow P(x)$.

3) $[P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow [Q(x) \wedge P(x)]$ et $[P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow [Q(x) \vee P(x)]$

4) $([P(x) \wedge Q(x)] \wedge R(x)) \Leftrightarrow (P(x) \wedge [Q(x) \wedge R(x)])$
et $([P(x) \vee Q(x)] \vee R(x)) \Leftrightarrow (P(x) \vee [Q(x) \vee R(x)])$

5) $([P(x) \wedge Q(x)] \vee R(x)) \Leftrightarrow ([P(x) \vee R(x)] \wedge [Q(x) \vee R(x)])$
et $([P(x) \vee Q(x)] \wedge R(x)) \Leftrightarrow ([P(x) \wedge R(x)] \vee [Q(x) \wedge R(x)])$

6) $\left(\overline{P(x) \wedge Q(x)}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}\right)$
et $\left(\overline{P(x) \vee Q(x)}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}\right)$ (Lois de De Morgan).

7) $(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \left(\overline{P(x)} \vee Q(x)\right)$

8) $\left(\overline{P(x) \Rightarrow Q(x)}\right) \Leftrightarrow \left(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\right)$

9) $(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \left(\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}\right)$

($\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$ est appelée implication cotraposée de $P(x) \Rightarrow Q(x)$)

10) $([P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \Rightarrow R(x)]) \Rightarrow [P(x) \Rightarrow R(x)]$

11) $[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Leftrightarrow ([P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \Rightarrow P(x)])$

Les propriétés précédentes sont vraies aussi pour les propsitions.

Quand deux prédicats sont équivalents on peut remplacer l'un par l'autre. (La même chose pour les propostions)

Remarques:

Soient A et B deux ensembles et $P(x,y)$ un prédicat à deux variables, alors $\forall y \in B,\ P(x,y)$ et $\exists y \in B,\ P(x,y)$ sont des prédicats à une seule variable donc on peux écrire:

1) $\forall x \in A, \forall y \in B,\ P(x,y)$ qui veut dire que tout x de A et tout y de B vérifient ensemble $P(x,y)$.

2) $\exists x \in A, \exists y \in B,\ P(x,y)$ qui veut dire que un certain x de A avec un certain y de B, vérifient ensemble $P(x,y)$.

3) $\forall x \in A, \exists y \in B,\ P(x,y)$ qui veut dire que tout x de A a son y de B, qui vérifient ensemble $P(x,y)$.

4) $\exists x \in A, \forall y \in B,\ P(x,y)$ qui veut dire que un certain x de A le même avec tous les y de B, vérifient ensemble $P(x,y)$.

Attention, dans 4), x doit être le même pour tous les y, par contre dans 3), y peut changer suivant x.

Exemples:

$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ (faux)
$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ (vrai)
$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z},\ x$ divise y (vrai)
$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 = -y$ (vrai)
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (xy)^2 > 0$ (faux)

1.3. Les grands types de raisonnement

1.3.1. Le raisonnement déductif

Pour montrer que la proposition Q est vraie il suffit que $P \Rightarrow Q$ et P soient vraies. Ce raisonnement est basé sur le fait que $P \wedge (P \Rightarrow Q)$ implque Q .

Exemple:

Montrons que l'équation $x^2 - x + 2012 = 0$ n'a pas de solution réelle.
On sait que pour une equation de second degrée dans $\mathbb{R}$ on a:
$\triangle < 0 \Rightarrow$ (l'eqution n'a pas de solutions réelle)
Soit l'equation $x^2 - x + 2012 = 0$,
On a $\triangle < 0$ est vraie donc l'equation n'a pas de solution réelle.

1.3.2. Le raisonnement par contraposée

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie il suffit de montrer que sa contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est vraie. Ce raisonnement est basé sur le fait que $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Exemple:

Montrons que (l'entier a^2 est pair)$\Rightarrow$(l'entier a est pair).
Il suffit de montrer que (l'entier a n'est pas pair)$\Rightarrow$ (l'entier a^2 n'est pas pair).
En effet:
(l'entier a n'est pas pair)$\Rightarrow$ $(a = 2n + 1) \Rightarrow (a^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1) \Rightarrow$ (a^2 n'est pas pair)
donc l'implication initiale (l'entier a^2 est pair)$\Rightarrow$(l'entier a est pair) est vraie.

1.3.3. Le raisonnement par l'absurde

Pour montrer que la proposition Q est vraie, on suppose que sa négation $\overline{Q}$ est vraie et on montre que cette supposition implique une proposition fausse.

Ce raisonnement est basé sur le fait que si $\overline{Q} \Rightarrow R$ est vraie et R est fausse alors $\overline{Q}$ est fausse, donc Q est vraie.

Exemple:

Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposon que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b $(b \neq 0)$ deux entiers premiers entre eux. $a^2 = 2b^2$ donc a^2 est pair. Mais on sait que (l'entier a^2 est pair)$\Rightarrow$(l'entier a est pair) alors $a = 2a'$ par conséquent $4a'^2 = 2b^2$ C.à.d: $2a'^2 = b^2$ et de la même façon on conclut que b est pair, donc 2 divise a et b ce qui est faux car a et b deux entiers premiers entre eux.

Par suite $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.3.4. Le raisonnement cas par cas [1]

Pour montrer que la proposition Q est vraie, il suffit de montrer que $P \Rightarrow Q$ et $\overline{P} \Rightarrow Q$. Ce raisonnement est basé sur le fait que si $P \Rightarrow Q$ et $\overline{P} \Rightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie.

Exemple:

Soit n un entier. Montrons que $n(n+1)$ est pair.

$1^{er} cas$: Si n est pair C.à.d: $n = 2k$, alors $n(n+1) = 2k(2k+1)$ qui est pair.

$2^{ème} cas$: Si n n'est pas pair C.à.d: $n = 2k+1$, alors $n(n+1) = (2k+1)(2k+2)$ qui est pair.

Dans les deux cas $n(n+1)$ est pair.

[1] Je ne l'ai pas fait en cours