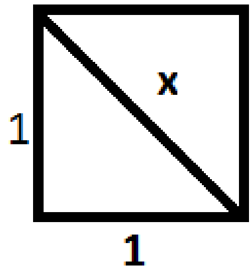

1. Cours 5: Le corps des réels et le corps des complexes

1.1. Le corps des nombres réels

Il existe des grandeurs x qui ne sont pas rationnelles (C.à.d: $x \notin \mathbb{Q}$).

Par exemple la diagonale x d'un carré de côté 1 est telle que $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ (Théorème de Pythagore). Cette grandeur est notée $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (Voir cours 1).

Ainsi, on ne peut pas "tout mesurer" avec des nombres rationnels. C'est pourquoi on est amené à considérer un ensemble de nombres plus riches noté $\mathbb{R}$ dont tout élément α peut être approché par défaut et par excès par des nombres décimaux. C.à.d:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{n}{10^m} \leq \alpha < \frac{n+1}{10^m} \qquad (\#1)$$

Exemples

$2012 \leq 2012 < 2013,$ $\quad \frac{20120}{10} \leq 2012 < \frac{20121}{10},$ $\quad \frac{201200}{10^2} \leq 2012 < \frac{201201}{10^2},$

$...., \frac{2012\times 10^m}{10^m} \leq 2012 < \frac{2012\times 10^m+1}{10^m}$

$0 \leq \frac{1}{3} < 1,$ $\quad \frac{3.}{10} \leq \frac{1}{3} < \frac{4}{10},$ $\quad \frac{33}{10^2} \leq \frac{1}{3} < \frac{34}{10^2},$

$...., \frac{33333...33.}{10^m} \leq \frac{1}{3} < \frac{33333...34}{10^m}$

$1 \leq \sqrt{2} < 2,$ $\quad \frac{14}{10} \leq \sqrt{2} < \frac{15}{10},$ $\quad \frac{141}{10^2} \leq \sqrt{2} < \frac{142}{10^2},$

$....., \frac{1414213562}{10^9} \leq \sqrt{2} < \frac{1414213563}{10^9}$

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ alors, $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de $10^m p$ par q permet d'écrire:

$10^m p = qk + r$ avec $k, r \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < q$

mais $0 \leq r < q \Rightarrow qk \leq qk + r < q(k+1)$

$$\Rightarrow qk \leq 10^m p < q(k+1)$$
$$\Rightarrow k \leq \frac{10^m p}{q} < (k+1)$$
$$\Rightarrow \frac{k}{10^m} \leq \alpha < \frac{(k+1)}{10^m}$$

Ainsi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble des réels)

On note $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{-\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \in \mathbb{R}^+\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^{+*} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, et $\mathbb{R}^{-*} = \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$

On admet dans ce cours que l'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de l'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ vérifiant:

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y \in \mathbb{R}$ (L'addition $+$ est une loi interne dans $\mathbb{R}$)

(b) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ ($+$ est associtive dans $\mathbb{R}$)

(c) $\exists e_1 = 0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = x \wedge 0 + x = x$ (0 est l'élément neutre pour $+$ dans $\mathbb{R}$).

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' = -x \in \mathbb{R}$, $x + (-x) = 0 \wedge (-x) + x = 0$ ($-x$ est l'inverse de x par rapport à $+$ dans $\mathbb{R}$)

(e) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$ ($+$ est commutative dans $\mathbb{R}$).

Ces propriétés se résument en disant que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

(a') $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y \in \mathbb{R}$ (La multiplication $\cdot$ est une loi interne dans $\mathbb{R}$)

(b') $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ($\cdot$ est associtive dans $\mathbb{R}$)

(c') $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \wedge (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$ ($\cdot$ est distributive par rapport à $+$ dans $\mathbb{R}$)

(d')$\exists e_2 = 1 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \cdot 1 = x \wedge 1 \cdot x = x$ (1 est l'élément neutre pour $\cdot$ dans $\mathbb{R}$).

(e') $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists x' = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$, $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1 \wedge (\frac{1}{x}) \cdot x = 1$ ($\frac{1}{x}$ est l'inverse de x par rapport à $\cdot$ dans $\mathbb{R}$)

(f') $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$ ($\cdot$ est commutative dans $\mathbb{R}$).

Ainsi $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

On admet aussi que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(a") $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ ($\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{R}$)

(b") $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a \leq b \wedge x \leq y \Rightarrow a + x \leq b + y$ (compatibilité de $+$ avec $\leq$)

(c") $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+$, $x \leq y \Rightarrow a \cdot x \leq a \cdot y$

(d") $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^{*+}, \exists n \in \mathbb{N},\ x \leq n \cdot y$ (Propriété d'Archimède).

1.1.1. Le corps des nombres complexes

On définit l'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2 : \ (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2\ ,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Proposition: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *est un corps commutatif.*
Ce corps est appelé le corps des complexes et est noté $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
Preuve: (Exercice)
Remarques:
En identifiant $(a_1, 0)$ à a_1 on peut dire que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
et en notant $(0, 1)$ par i on trouve $i^2 = (-1, 0)$ qui s'identifie à -1.

En effet:
$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \approx -1$

Forme algébrique d'un nombre complexe, Conjugaison et Module Dans le corps $\mathbb{C}$ tout élément z s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

En efftet:
Soit $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, alors:

$$\begin{aligned} z = (a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (0, 1)(b, 0) \\ &= a + ib \text{ avec les identifications } \quad (a, 0) \approx a,\ (b, 0) \approx b \text{ et la notation } i = (0, 1) \end{aligned}$$

Cette écriture est appelée la forme algébrique de z.

a est appelée la partie réelle de z et notée $\mathrm{Re}(z)$, et b la partie imaginaire de z et notée $\mathrm{Im}(z)$

Le complexe $\mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$ est appelé le conjugué de z et noté $\overline{z}$

Le réel $\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$ est appelé le module de z et noté $|z|$

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 1 ($1^{ère}$ Année LMD)

Fiche de T.D $\boldsymbol{N^0}$ **5**

Exercice 1:
Exercice 2:
Exercice 3: