1. Cours 8: Applications linéaires.

1.1. Applications linéaires

Définition: *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite linéaire, si*

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in E\text{: } f(\alpha \bullet x + \beta \bullet y) = \alpha \bullet f(x) + \beta \bullet f(y)$$

**Une application linéaire bijective est appelée isomorphisme.*
**Une application linéaire de E dans E est appelée endomorphisme de E.*
**Un endomomorphisme bijectif est appelé automorphisme.*

Exemples:
1) L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + 3y - z, x + z)$ est une application linéaire. En effet:
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, on a:

$$\begin{aligned}
f(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)) &= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\
&= (2(\alpha x_1 + \beta x_2) + 3(\alpha y_1 + \beta y_2) - (\alpha z_1 + \beta z_2), (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)) \\
&= (\alpha(2x_1 + 3y_1 - z_1) + \beta(2x_2 + 3y_2 - z_2), \alpha(x_1 + z_1) + \beta(x_2 + z_2)) \\
&= \alpha(2x_1 + 3y_1 - z_1, x_1 + z_1) + \beta(2x_2 + 3y_2 - z_2, x_2 + z_2) \\
&= \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2)
\end{aligned}$$

* f n'est pas un isomorphisme d'espaces vectoriels (f n'est pas injective)

2) L'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $g(z) = \overline{z}$ n'est pas une application linéaire, si on considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En effet:
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a: $g(\alpha z + \beta z') = \overline{\alpha z} + \overline{\beta z'} = \overline{\alpha} g(z) + \overline{\beta} g(z')$
Prenons $z = 2, z' = i$ et prenons $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2i$, on a:

$$g(\alpha z + \beta z') = g((1 + i).2 + 2i(i)) = -2i.$$
$$\alpha g(z) + \beta g(z') = (1 + i).2 + 2i(-i) = 4 + 2i \neq g(\alpha z + \beta z').$$

Mais si on considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, les scalaires α, β seront choisis de $\mathbb{R}$, alors $\overline{\alpha} = \alpha$ et $\overline{\beta} = \beta$, donc dans ce cas g devient une application linéaire.
* g est un endomorphisme et puisque elle est bijective c'est un automorphisme.

3) La dérivation des polynômes $D : K[X] \to K[X]$ qui associe à chaque polynôme P son polynôme dérivé P' (**Voir cours 6**) est une application linéaire. En effet:
Soit $\alpha, \beta \in K$ et soit $P, Q \in K[X]$, on a:

$$(D(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q' = \alpha D(P) + \beta D(Q)).$$

* D est un endomorphisme qui n'est pas un automorphisme (D n'est pas injective).

Remarque: Si f est une application linéaire alors
$\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K, \forall a_1, a_2, ..., a_n \in K,$
$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n) = \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + ... + \lambda_n f(a_n)$

Théorème: *Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors:*
1) $f(0_E) = 0_F$
2) $\forall\ x \in E\ :\ f(-x) = -f(x)$
3) $\operatorname{Im} f = f(E)$ *est un sous espace vectoriel de* F.
4) $\ker f = f^{-1}\{0_F\}$ *est un sous espace vectoriel de* E.
5) f *est surjective* $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$
6) f *est injective* $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$

On rappelle que $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x)\ /\ x \in E\}$ et $\ker f = f^{-1}\{0_F\} = \{x \in E\ /\ f(x) = 0_F\}$

Preuve:

1) On a: $$\begin{aligned} f(0_E) &= f(0_E) + 0_F = f(0_E) + f(0_E) - f(0_E) \\ &= f(0_E + 0_E) - f(0_E) = f(0_E) - f(0_E) = 0_F \end{aligned}$$

2) Soit $x \in E$, on a:
$f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(0_E) = 0_F$, alors $f(-x) = -f(x)$.

3) D'après 1), on a $f(0_E) = 0_F$, alors $0_F \in \operatorname{Im} f$.
Soit $\alpha, \beta \in K$ et soit $y, y' \in \operatorname{Im} f$, alors $\exists x, x' \in E$, $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
On a $\alpha y + \beta y' = \alpha f(x) + \beta f(x') = f(\alpha x + \beta x') \in \operatorname{Im} f$,
Alors, $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de F.

4) D'après 1), on a $f(0_E) = 0_F$, alors $0_E \in \ker f$
Soit $\alpha, \beta \in K$ et soit $x, x' \in \ker f$.
On a $f(\alpha x + \beta x') = \alpha f(x') + \beta f(x') = \alpha 0_F + \beta 0_F = 0_F$, d'où $\alpha x + \beta x' \in \ker f$,
alors, $\ker f$ est un sous espace vectoriel de E.

5) On a: $$\begin{aligned} f \text{ est surjective } &\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in F, y \in \operatorname{Im} f \\ &\Leftrightarrow F \subset \operatorname{Im} f \\ &\Leftrightarrow F = \operatorname{Im} f \quad \text{car il est clair que } \operatorname{Im} f \subset F \end{aligned}$$

6) Supposons que f est injectif, alors:
$\ker f = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = \{x \in E\ /\ f(x) = f(0_E)\} = \{0_E\}$.
Inversement , supposons $\ker f = \{0_E\}$, et soit $x, x' \in E$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow f(x) - f(x') = 0_F \\ &\Rightarrow f(x - x') = 0_F \\ &\Rightarrow x - x' \in \ker f \\ &\Rightarrow x - x' = 0_E \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

Alors f est injetive. ■

Exemples:

1) Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + 3y - z, x + z)$.
$\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (2x + 3y - z, x + z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$.

On a $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = y = -x\}, \text{ alors } f \text{ n'est pas injective, car } \ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ \operatorname{Im} f &= \{f(x, y, z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(2x + 3y - z, x + z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(2, 1) + y(3, 0) + z(-1, 1) \ / \ x, y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Alors $\operatorname{Im} f$ est le sous espace vectriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par la partie $G = \{(2, 1), (3, 0), (-1, 1)\}$ qui n'est pas libre (sinon $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} f) = 3$ ce qui est impossible car $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} f) \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$).
La partie G contient une base et comme la partie $G_1 = \{(2, 1), (3, 0)\}$ est libre, il existe une base A de $\operatorname{Im} f$ telle que $G_1 \subset A \subset G$ ce qui implque que $G_1 = A$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} f) = 2$ d'où $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ et par conséquent f est surjective.

1.2. Applications linéaires et dimensions

Théorème: *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors:*

$$\dim_K E = \dim_K(\ker f) + \dim_K(\operatorname{Im} f).$$

Preuve: $\ker f$ est un sous espace de dimension finie de E.
Posons $k = \dim_K(\ker f)$ et soit $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ une base de $\ker f$ qu'on complète en base de E. Soit $\{e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$, où $n = \dim_K E$.
Montrons que $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
Soit $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n \in K$,

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} f(e_{k+1}) + ... + \lambda_n f(e_n) = 0 &\Rightarrow f(\lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n \in \ker f \\ &\Rightarrow \exists \lambda_1, ..., \lambda_k \in K : \lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k \\ &\Rightarrow -\lambda_1 e_1 - ... - \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une partie libre de $\operatorname{Im} f$.

Soit $y \in \operatorname{Im} f$, alors $\exists x \in E : y = f(x), x \in E$.

Or $\exists x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n \in K : x = x_1e_1 + ... + x_ke_k + x_{k+1}e_{k+1} + ... + x_ne_n$,

d'où $$\begin{aligned} y &= f(x_1e_1 + ... + x_ke_k + x_{k+1}e_{k+1} + ... + x_ne_n). \\ &= x_1f(e_1) + ... + x_kf(e_k) + x_{k+1}f(e_{k+1}) + ... + x_nf(e_n) \\ &= x_{k+1}f(e_{k+1}) + ... + x_nf(e_n) \text{ car } \{e_1, e_2, ..., e_k\} \subset \ker f \end{aligned}$$

Par conséquent $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une partie génératrice de $\operatorname{Im} f$.

En conclusion $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$, et $\dim_K(\operatorname{Im} f) = n - k$,

ainsi $n = \dim_K E = \dim_K(\operatorname{Im} f) + k = \dim_K(\operatorname{Im} f) + \dim_K(\ker f)$ ■

Remarque: Le théorème est vrai même en dimension infinie.

Exemples:

1) Soit l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $g(a, b, c) = (b, a - b, b - c, a + 2c)$

$\ker g = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (b, a - b, b - c, a + 2c) = (0, 0, 0, 0)\}$,

On a $\begin{cases} b = 0 \\ a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$

Donc $\ker g = \{(0, 0, 0)\}$, alors g est injective.

On a $3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} g) + \dim_{\mathbb{R}}(\ker g) = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} g)$, alors $\operatorname{Im} g \neq \mathbb{R}^4$, car $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Par conséquent g n'est pas surjective.

Corollaire: *Si E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors:*

1) $\dim_K(\operatorname{Im} f) = \dim_K E \Leftrightarrow f$ *est injective.*

2) $\dim_K(\ker f) = \dim_K E - \dim_K F \Leftrightarrow f$ *est surjective.*

Corollaire: *Si E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors:*

1) $\dim_K E = \dim_K F \Leftrightarrow E$ *est isomorphe à F.*

2) $\dim_K E = n \Leftrightarrow E$ *est isomorphe à K^n.*

Rang d'une application linéaire: *Le rang d'une application linéaire f noté $rg\ f$ est la dimension de son image.* C.à.d: $rg\ f = \dim_K(\operatorname{Im} f)$.

Remarques: En dimension finie, on a:

1) $rg\ f = \dim_K(E) - \dim_K(\ker f)$, où E est l'espace de départ de f.

2) f est surjective $\Leftrightarrow rg\ f = \dim_K(F)$, où F est l'espace d'arrivée de f.

Exemples:

1)Soit l'application $h : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $h(P) = (X^2 + X + 4) P''$, où $\mathbb{R}_3[X]$ est l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus 3 et P'' le polynôme dérivé du polynôme dérivé de P (voir **cours 6**)

Montrons que h est un endomorphisme et calculons son rang.
1) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} h(\alpha P_1 + \beta P_2) &= (X^2 + X + 4)(\alpha P_1 + \beta P_2)'' \\ &= \alpha (X^2 + X + 4) P_1'' + \beta (X^2 + X + 4) P_2'' = \alpha h(P_1) + \beta h(P_2) \end{aligned}$$

Alors h est une application linéaire.

Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h(P) &= (X^2 + X + 4)(2a_2 + 6a_3 X) \\ &= (6a_3) X^3 + (2a_2 + 6a_3) X^2 + (2a_2 + 24a_3) X + 8a_2 \end{aligned}$$

$h(P) \in \mathbb{R}_3[X]$, donc h est un endomorphisme.

$\ker h = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ h(P) = 0\}$ et si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$

On a $h(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6a_3 = 0 \\ 2a_2 + 6a_3 = 0 \\ 2a_2 + 24a_3 = 0 \\ 8a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$

$\ker h = \{P = a_0 + a_1 X \ / \ a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ qui admet $\{1, X\}$ comme base, donc $\dim_{\mathbb{R}}(\ker h) = 2$ et comme $\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, alors $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.
En fin $rg\ h = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X]) - \dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 4 - 2 = 2$, et par suite h n'est pas surjective.

Théorème: *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.*
Alors: $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire.

Preuve: Soit $\alpha, \beta \in K$ et soit $x, x' \in E$, on a:

$$g \circ f(\alpha x + \beta x') = g(\alpha f(x) + \beta f(x')) = \alpha g(f(x)) + \beta g(f(x')) = \alpha g \circ f(x) + \beta g \circ f(x').$$

Théorème: *Soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective.*
Alors: $f^{-1} : F \to E$ est une application linéaire.

Preuve: Soit $\alpha, \beta \in K$ et soit $y, y' \in F$,

Comme f est surjective, alors $\exists x, x' \in E$, $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

On peut écrire donc $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$.

On a: $$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha y + \beta y') &= f^{-1}(\alpha f(x) + \beta f(x')) \\ &= f^{-1}(f(\alpha x + \beta x')) \\ &= \alpha x + \beta x' \qquad \text{car } z = f(t) \Leftrightarrow t = f^{-1}(z) \\ &= \alpha f^{-1}(y) + \beta f^{-1}(y') \end{aligned}$$