

Examen Final (2015-2016)

Exercice 01 (06pts):

Soit \mathbb{S} la relation définie sur \mathbb{Z}^2 par :

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}^2 : (a,b)\mathbb{S}(c,d) \Leftrightarrow (a \text{ divise } c \text{ et } b \leq d)$$

1. Est-ce-que \mathbb{S} est une relation antisymétrique ? (justifier)
2. Montrer que \mathbb{S} est une relation d'ordre sur \mathbb{N}^2 .
3. L'ordre est-il total ? (justifier).
4. L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, \forall (x,y) \in \mathbb{N}^2 : (a,b)\mathbb{S}(x,y)$$

Exercice 02(06pts) :

1. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Montrer que :

Si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

2. Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
 - Déterminer $g^{-1}(\{0,1\})$
 - Etudier l'injectivité et la surjectivité de g .
 - En déduire que $g \circ g$ n'est pas surjective.

Exercice 03(08pts) :

Soit Δ une loi de composition définie sur \mathbb{Q} par, $\forall x,y \in \mathbb{Q} : x \Delta y = (x-1)(y-1)+1$

1. Montrer que $(\mathbb{Q} - \{1\}, \Delta)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que $f : t \mapsto t-1$ est un homomorphisme du $(\mathbb{Q} - \{1\}, \Delta)$ dans (\mathbb{Q}^*, \cdot) .
3. Pour tout x de $\mathbb{Q} - \{1\}$ et tout n de \mathbb{N}^* , posons $x^{(n)} = \underbrace{x \Delta x \Delta \cdots \Delta x}_{(n \text{ fois})}$.

Déterminer l'expression simple de $x^{(n)}$. Exemple, calculer $3^{(11)} - 3^{(5)}$.

Remarque: $x^{(n)}$ est en général différent de $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{(n \text{ fois})}$

Bon courage