Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Département d'informatique
Module Analyse 1

Fiche des travaux dirrigées 3

Exercice 01

Montrer à l'aide de la definition d'une limite que :

$\lim\limits_{x\to -2} x^2-1=3 \qquad \lim\limits_{x\to 1} x^3-1=0 \qquad \lim\limits_{x\to 1_-} \frac{1}{1-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \exp x=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+x+1}{1-x}=1 \qquad \lim\limits_{x\to -\infty} x^2+x+1=+\infty$

Exercice 02

I)Calculer les limites suivantes dans les cas suivantes

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1},\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}, \lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x), \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}, \lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},\ \lim\limits_{x\to 3^+_-} \frac{x-3}{|x-3|}, \lim\limits_{x\to 0^+_-} \frac{1}{1+\exp\frac{1}{x}}$

II) Montrer que les fonction suivantes n'admet pas une limite

$f(x)=\cos(ln|x|)$, $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ au voisinage de 0

Exercice 03

Montrer les inégalités suivantes

I) Si $x\to 0$

$2x^2-x=O(x) \qquad x\sin\frac{1}{x}=O(x) \qquad 2x^3-3x^2=o(x)$

II) Si$x\to +\infty$

1) $2x^3-3x^2+1=O(x^3) \qquad \frac{x+1}{x^2+1}=O(\frac{1}{x})$

Exxercice 4

I)Etudier la continuité des fonctions suivantes

$y=\begin{cases} |\frac{\sin x}{x}|, x\neq 0 \\ 1 \qquad x=0\end{cases} \quad y=\begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, x\neq 0 \\ 1 \qquad x=0\end{cases} \quad y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0 \qquad x=0\end{cases} \quad y=\frac{x-|x|}{x}$

II) Pour quelle valeure de a les fonctions suivantes sont continues ?

$y=\begin{cases} \frac{x}{\ln(1+2x)}, x\neq 0 \\ a \qquad x=0\end{cases} \quad y=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ a \qquad x=0\end{cases}$

Exercice 5

Peut-on prolonger par continuité les fonctions ssuivantes ?

$f(x)=1-x\sin\frac{1}{x}$ en $x=0$, $g(x)=\sin x\sin\frac{1}{x}$ en $x=0$

$h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en $x = 0$

Exercice 6

Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes

$y = \sqrt{x}(1 \leq x \leq \infty)$, $y = x^2(-a < x < a)$

Execice 6

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes

$f(x) = |x| + x^2 \qquad (x-1)E(x) \qquad y = \begin{cases} x^3 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$

$f(x) = \sqrt{|x-2|}$

Exercice 7

• Calculer les dérrivées des fonctions suivantes

1)$y = \sin x \ln |x|$,2)$y = \dfrac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$,3)$y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$,4)$y = \sin x . e^{\cos x}$

Montrer que la fonction suivantes $y = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad x = 0 \end{cases}$ est continue en x_0, mais elle n'est pas dérivable en ce point.

Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction $y = \begin{cases} \alpha x + \beta, x \leq 1 \\ a \qquad x > 1 \end{cases}$ soit continue sur et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Al'aide de la règle d'Hopital, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3}}{1 - 2\cos x} \qquad \lim_{x \to 0} x^2 . e^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{tg3x}{tgx}$$