Solution Type du Rattrapage du Contrôle Continu N°1 : (7 Points)

Démonstration du théorème d'***ARDEN:***

- 1) a- Montrer que A^*B est la solution de l'équation $X = AX + B$. $A(A^*B) + B = (AA^*B) + B$

$= A^+B + B = (A^+ + \{\varepsilon\})B = A^*B$.

b- Montrer que $X = A^*B$ est la solution minimale. Donc : $\forall X : A^*B \subseteq X$. Soit $\omega \in A^*B$

$\omega \in A^*B \Rightarrow \omega = xy$ avec $x \in A^*$ et $y \in B$; $x \in A^* \Rightarrow \exists i \geq 0$ tel que $x \in A^i$ d'où $\omega \in A^iB$. On a :

$X = AX + B = A(AX + B) + B = A^2X + AB + B$

$= A^2(AX + B) + AB + B$
$= A^3X + A^2B + AB + B$

.

.

.

$= A^{i+1}X + A^iB + \ldots\ldots + AB + B$

Et nous savons que $\omega \in A^iB \Rightarrow \omega \in X \Rightarrow X \supseteq A^*B$.

2) Démonstration par l'absurde :

Supposons qu'il existe deux solutions différents X et X′ :

Donc on a $\varepsilon \notin A$ et considérons le plus petit mot $f \in X$ et $f \notin X'$ ainsi soient:

$X = AX+B$

$X' = AX'+B$

Avec $X \neq X'$ et soit $f \in X$ tel que $f \notin X'$

$f \in X \Rightarrow f \in AX$ ou $f \in B$.

- Si $f \in B \Rightarrow f \in X'$ ce qui est faux $\Rightarrow f \in AX \Rightarrow f = xy$ avec $x \in A$ et $y \in X$.
Sachant que $\varepsilon \notin A \Rightarrow x \neq \varepsilon$ donc $|y| < |f|$ Il existe deux cas sur y.
- $y \in X' \Rightarrow xy \in AX' \Rightarrow f \in AX' \Rightarrow f \in X'$ ce qui est faux, le seul cas qui reste.
- $y \notin X'$ et $y \in X$ avec $|y|<|f|$ mais f est le plus petit mot suivant les hypothèses, il y a donc contradiction et ainsi l'hypothèse est fausse.

Solution type du Rattrapage du Contrôle Continu N°2 : (7 Points)

- L'automate ***A'*** de type trois (03) déterministe équivalent à l'automate ***A*** définit ci-en-face :

A': δ' =

	Q' \ X	→	←
→	0	1	2
	1	(1,4)	
	2		(2,3)
←	(1,4)	(1,4)	(4)
	(2,3)	(0)	(2,3)
←	(4)	(4)	(4)