

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
Faculté des Mathématiques & d'informatique
Département d'informatique
Fiche TD N° :1 du Module : Logique Mathématique
2^{ème} Année LMD Année 2017-2018
Responsable du module : Adda BOUALEM

1. Traduire les énoncés suivants dans le langage propositionnel :
 - La pollution détruit la faune et la flore
 - Il est des animaux domestiques comme il est des animaux sauvages
 - Je bois du café mais je ne fume pas
 - Je mange sans appétit
 - Les humains sont mortels, les grecs sont des humains, donc les grecs sont mortels.
 - Il n'y a pas de fumée sans feu.
 - Je dors quand j'ai sommeil.
 - Il pleut quand il y a des nuages.
 - Quand il pleut, il y a des nuages.
 - Il réussira, à moins qu'il ne travaille pas.
2. Placer les parenthèses :
 - $P \rightarrow \neg Q \wedge \neg R \wedge \neg S, P \rightarrow Q \vee P \rightarrow R, P \leftrightarrow Q \vee \neg R \rightarrow P \wedge R, P \wedge \neg Q \vee \neg R \wedge \neg S$
3. Supprimer les parenthèses superflues : (toutes les parenthèses puis avec le minimum de parenthèses.)
 1. $((\neg P) \wedge \neg Q) \rightarrow R, Q \vee (P \rightarrow R), P \rightarrow ((Q \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)), (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (\neg R))$
4. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies :
 1. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P), (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q), (P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow Q),$
 2. $(P \vee Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$
5. Montrer que la formule $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ est une tautologie. En déduire que $((P \rightarrow Q) \rightarrow B) \rightarrow (((P \rightarrow Q) \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow C))$ est aussi une tautologie.
6. La réciproque du théorème de substitution est-elle valide ?
7. Lesquelles des propositions suivantes sont valides ?
 1. $\models \alpha \wedge \beta \Rightarrow (\models \alpha \text{ et } \models \beta)$
 2. $\models \alpha \vee \beta \Rightarrow (\models \alpha \text{ ou } \models \beta)$
 3. $\models \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow (\text{si } \models \alpha \text{ alors } \models \beta)$
 4. $\models \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow (\models \alpha \text{ si et seulement si } \models \beta)$
8. Montrer que si $\alpha \models \beta$ et $\beta \models \alpha$ alors $\alpha \equiv \beta$
9. Lesquelles des propositions suivantes sont valides
 - $\alpha \leftrightarrow \beta \models \alpha \wedge \beta$
 - $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta), \alpha \rightarrow \beta \models \alpha \vee \beta$
 - Si $\Gamma, \alpha \models \delta$ alors $\Gamma, \alpha \vee \beta \models \delta$
 - Si $\Gamma, \alpha \models \delta$ alors $\Gamma, \alpha \wedge \beta \models \delta$
 - Si $\Gamma, \alpha \models \delta$ alors $\Gamma, \neg \alpha \models \neg \beta$.
10. Soit Γ l'ensemble de formules : $\{P \vee Q, P \rightarrow Q, \neg Q \rightarrow P\}$
 1. Trouver deux formules β_1, β_2 n'appartenant pas à Γ et telles que $\Gamma \not\models \beta_1$ et $\Gamma \not\models \beta_2$
 2. Trouver deux formules β_1, β_2 n'appartenant pas à Γ et telles que $\Gamma \models \beta_1$ et $\Gamma \models \beta_2$
 3. Trouver une formule β telle que $\Gamma \cup \{\beta\}$ ne soit pas satisfiable
11. Montrer que les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ suffisent à exprimer les formules logiques dont les fonctions de vérité pourraient être décrites par les fonctions $\{f_1, f_3, f_4, f_6, f_9, f_{10}, f_{12}, f_{14}, f_{15}, f_{16}\}$ du tableau 1.8 du cours
12. Montrer que l'ensemble $\{\vee, \rightarrow\}$ ne forme pas un système complet.
13. Montrer que le connecteur \downarrow dont la fonction de vérité est la fonction f_{15} , du tableau 1.8 du cours forme à lui seul un système complet.
14. Montrer que le connecteur \uparrow dont la fonction de vérité est la fonction f_{15} , du tableau 1.8 du cours forme à lui seul un système complet.
15. Soit L un langage propositionnel comportant uniquement le connecteur \uparrow . Donner les formules atomiques et composées de L .
16. Soit L un langage propositionnel dont les connecteurs sont : \neg et \vee .
 1. Donner les formules atomiques et composées de L

2. Montrer que l'ensemble $\{\neg, \vee\}$ un système complet.
17. Soit L un langage propositionnel dont les symboles de connecteurs sont : \neg et \rightarrow .
1. Donner les formules de L
 2. Montrer que le système $\{\neg, \rightarrow\}$ est complet
 3. Montrer que le connecteur \nearrow tel que : $P \nearrow Q = \neg(P \rightarrow Q)$ et dont la fonction de vérité est la fonction f_{12} , du tableau 1.10 ne forme pas un système complet.
 4. Donner quatre formules $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ telles que : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \models \beta$
18. Mettre sous forme normale conjonctive est disjonctive les formules suivantes :
1. $(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R), (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q), (P \vee Q) \vee (P \rightarrow R), (P \vee Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$
 2. $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q), P \wedge Q, P \vee Q, P, Q, \neg(Q \rightarrow P \rightarrow R)$
19. Montrer que : Si $\alpha \models \beta$ alors $(\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \alpha)) \dots \models (\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \beta)) \dots$ ($n \geq 1$)
20. Montrer que : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta$ ssi $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$
21. Montrer que : si $\models (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha$ et $(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \alpha$ alors $\models \alpha \leftrightarrow \beta$.
- 22.

Soit f une fonction logique à trois variables, $f : \{F, V\}^3 \rightarrow \{F, V\}$ définie par :

$$\begin{cases} f(t, t, \neg t) = f(t, V, V) = F \\ f(t, \neg t, t) = f(t, F, F) = V \end{cases} \text{ pour tout } t \in \{F, V\}.$$

- 1) Établir la table de vérité de f.
- 2) Donner la forme normale disjonctive de f la plus simplifiée possible et sa forme normale conjonctive la plus réduite possible.
- 3) La fonction f est-elle unique ? Justifiez.

23 : On rappelle que \perp désigne une constante propositionnelle toujours fautive, et \top une constante propositionnelle toujours vraie. On désigne par If le connecteur ternaire « Si ... alors ... sinon » dont voici la table de vérité :

1. On appelle littéraux les atomes X, A, B et leurs négations. Donner un équivalent de $\text{If}(X, A, B)$ qui est :

a. une forme normale disjonctive, puis une forme normale disjonctive n'utilisant que deux conjonctions de deux littéraux chacune ;

b. une forme normale conjonctive, puis une forme normale conjonctive n'utilisant que deux disjonctions de deux littéraux chacune ;

c. une conjonction de deux implications entre littéraux.

Chacun des équivalents doit être justifié.

2. Donner pour chacune des formules : $\neg\alpha, (\alpha \vee \beta), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \rightarrow \beta)$, un équivalent utilisant

une seule occurrence de chacun des connecteurs If, \perp, \top (justifier).

En déduire que $\{\text{If}, \perp, \top\}$ est un système complet de connecteurs.

X	A	B	f(X,A,B)
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F