

Responsable du module : Adda BOUALEM

## Examen Final du Module : Logique Mathématique

### Exercice 1 (Logique des propositions) : 8pts

$\alpha$  et  $\beta$  deux formules définies respectivement par :  $\alpha: P \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$  et  $\beta: \neg P \rightarrow Q$

1. Tracer la Table de vérité de  $\alpha$  et  $\beta$ .
2. Donner une formule  $\gamma_1$  si possible tel que :  $\alpha \rightarrow \beta \vee \gamma_1$  est non satisfiable (insatisfiable).
3. Dédire de la question précédente une formule  $\gamma_2$  tel que :  $\alpha \rightarrow \beta \vee \gamma_2$  est tautologie.
4. Donner  $\gamma_3$  tel que :  $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow P), \neg P \rightarrow Q \models \gamma_3$

### Exercice 2 (Logique des prédicats) 6pts

Traduire les phrases suivantes dans le langage des prédicats du premier ordre :

- a. Il existe des médecins qualifiés comme il existe des médecins non qualifiés.
- b. Certaines épidémies sont contagieuses, d'autres pas du tout.
- c. Ils sont tous médecins ou tous malades.
- d. Covid-19 frappe tous les personnes qui ne protègent pas eux-mêmes.

### Exercice 3 Logique des propositions : 6pts

Traduire les phrases suivantes dans la logique propositionnelle :

- a. Les médicaments sont bénéfiques, les injections sont médicaments, donc les injections sont bénéfiques.
- b. Il produit quand il y a des idées scientifiques.
- c. Quand il produit, il y a des idées scientifiques.

#### Prédicats :

M(x) : x est médecin  
D(x) : x est malade  
Q(x) : x est qualifié  
C(x) : x est contagieuse  
P(x) : x est épidémie  
R(x,y) : x protège y  
F(x,y) : x frappe y

#### Constantes :

v : Covid-19

#### Les propositions

M : Les médicaments sont bénéfiques  
I : Les injections sont médicaments  
L : Les injections sont bénéfiques  
P : il produit  
S : Il y a des idées scientifiques  
B : il est bénéfique

1. Lesquelles des expressions suivantes sont des formules du langage de prédicats du premier ordre (1.5pts)

1.  $\exists x \forall y Q(x, y)$
2.  $\exists x \forall y x = y$
3.  $P(x, y) \rightarrow (Q(x, y) \rightarrow P(x, y))$
4.  $\models P(x, y) \rightarrow (Q(x, y) \rightarrow P(x, y))$

2. Indiquer les occurrences libres et liées de la variable x dans la formule suivante : (2pts)

$$\exists x Q(x) \rightarrow P(x, y) \rightarrow \neg Q(x) \wedge P(x, y)$$

3. Indiquer les termes et les formules, si **f** est un symbole de fonction, **H** un symbole de prédicat, **a** constante et **x, y** symboles de variables : (2pts)

a. $f(H(x), a)$ b. $H(f(x), a)$ c. $a > x$	d. $(x, y)$ e. $a$ f. $f(x, y)$
--	---------------------------------------

4. Une formule satisfiable peut être une formule tautologie ? (1pt)

5. Existe-t-il une formule qui n'est ni vraie, ni fausse, si oui donner un exemple (1.5pts)

6. Soient  $\alpha, \beta$  deux formules dans la logique propositionnelle. (3pts)

- a. Est-ce que  $\alpha \rightarrow \beta$  est toujours satisfiable quel que soit  $\alpha, \beta$  ? Justifier
- b. Donner s'il est possible un exemple de  $\alpha, \beta$  pour que  $\alpha \rightarrow \beta$  soit tautologie
- c. Donner s'il est possible un exemple de  $\alpha, \beta$  pour que  $\alpha \rightarrow \beta$  soit non satisfiable

7. Soit la table Table1 est la table de vérité des formules  $\alpha, \beta, \gamma$  (3pts)

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
V	F	F
F	V	V
F	V	V
F	V	F
V	V	F
F	F	V
F	F	V
F	V	F

1. Donner un exemple de conséquence logique à partir de la **Table 1**
2. Quel est le connecteur correspondant ( $\downarrow$ ) pour que  $\models \alpha \downarrow \beta \downarrow \gamma$  tel que :  $\downarrow \in \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ .
3. Quel est le connecteur correspondant ( $\downarrow$ ) pour que  $\alpha \downarrow \beta \downarrow \gamma$  est insatisfiable tel que :  $\downarrow \in \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ .

**Table 1**

*Bon courage*

# Correction de L'examen final : Logique Mathématique

## Exercice 1 (Logique des propositions) : 8pts

$\alpha$  et  $\beta$  deux formules définies respectivement par :  $\alpha: P \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$  et  $\beta: \neg P \rightarrow Q$

1. Tracer la Table de vérité de  $\alpha$  et  $\beta$ . (2pts)
2. Donner une formule  $\gamma_1$  si possible tel que :  $\alpha \rightarrow \beta \vee \gamma_1$  est insatisfiable. (2pts)
3. Dédire de la question précédente une formule  $\gamma_2$  tel que :  $\alpha \rightarrow \beta \vee \gamma_2$  est tautologie. (2pts)
4. Donner  $\gamma_3$  tel que :  $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow P), \neg P \rightarrow Q \models \gamma_3$  (2pts)

P	Q	$\alpha: P \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$	$\beta: \neg P \rightarrow Q$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
V	V	V	V	N'est possible N'existe pas (pas)	Il suffit que	V
V	F	V	V		$\gamma_2$ soit	V
F	V	V	V		tautologie ( $\models$ )	V
F	F	V	F		$\gamma_2$	V/F

Alors on peut choisir :

$\gamma_3: P \vee Q$

Ou des formules de la forme :

$\gamma_3: \gamma$

Tel que  $\models \gamma$

## Exercice 2 (Logique des prédicats) 6pts

Traduire les phrases suivantes dans le langage des prédicats du premier ordre :

- a. Il existe des médecins qualifiés comme il existe des médecins non qualifiés.  
 $\exists x(M(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists y(M(y) \wedge \neg Q(y))$  (2pts)
- b. Certaines épidémies sont contagieuses, d'autres pas du tout.  
 $\exists x(P(x) \wedge C(x)) \wedge \exists y(P(y) \wedge \neg C(y))$  (2pts)
- c. Ils sont tous médecins ou tous malades.  $\forall x(M(x) \vee D(x))$  (1pt)
- d. Covid-19 frappe tous les personnes qui ne protègent pas eux-mêmes.  $\forall x(\neg R(x, x) \rightarrow F(v, x))$  (1pt)

## Exercice 3 Logique des propositions : 6pts

Traduire les phrases suivantes dans la logique propositionnelle :

- a. Les médicaments sont bénéfiques, les injections sont médicaments, donc les injections sont bénéfiques.  
 $(M \wedge I) \rightarrow L$  (2pts)
- b. Il produit quand il y a des idées scientifiques.  $P \rightarrow S$  (2pts)
- c. Quand il produit, il y a des idées scientifiques.  $S \rightarrow P$  (2pts)

## Examen de TD 14pts

1. Lesquelles des expressions suivantes sont des formules du langage de prédicats du premier ordre (1.5pts)

5.  $\exists x \forall y Q(x, y)$     **V**    (0.5pt)  
 6.  $\exists x \forall y x = y$     **V**    (0.5pt)  
 7.  $P(x, y) \rightarrow (Q(x, y) \rightarrow P(x, y))$     **V**    (0.5pt)  
 8.  $\models P(x, y) \rightarrow (Q(x, y) \rightarrow P(x, y))$     **F**

2. Indiquer les occurrences libres et liées de la variable x dans la formule suivante : (2pts)



(0.5pt pour chaque occurrence)

3. Indiquer les termes et les formules, si **f** est un symbole de fonction, **H** un symbole de prédicat, **a** constante et **x, y** symboles de variables : (2pts)

$f(H(x), a)$	<b>N</b>
$H(f(x), a)$	<b>F</b>
$a > x$	<b>F</b>

$(x, y)$	<b>N</b>
$a$	<b>t</b>
$f(x, y)$	<b>t</b>

(0.5pt pour chaque terme ou formule)

4. Une formule satisfiable peut être une formule tautologie ?    **V**    (1pt)  
 5. Existe-t-il une formule qui n'est ni vraie, ni fausse, si oui donner un exemple ?    **F**    (une formule porte un seul sens soit V, ou F mais pas les deux à la fois) (1.5pts)  
 6. Soient  $\alpha, \beta$  deux formules dans la logique propositionnelle. (3pts)

- a. Est-ce que  $\alpha \rightarrow \beta$  est toujours satisfiable quel que soit  $\alpha, \beta$  ? Justifier **F** (contre exemple  $\alpha: P \vee \neg P, \beta: Q \wedge \neg Q$ )    (1pt)  
 b. Donner s'il est possible un exemple de  $\alpha, \beta$  pour que  $\alpha \rightarrow \beta$  soit tautologie ( $\alpha: P \vee \neg P, \beta: Q \vee \neg Q$ )    (1pt)  
 c. Donner s'il est possible un exemple de  $\alpha, \beta$  pour que  $\alpha \rightarrow \beta$  soit non satisfiable  $\alpha: P \vee \neg P, \beta: Q \wedge \neg Q$ )    (1pt)

7. Soit la table Table1 est la table de vérité des formules  $\alpha, \beta, \gamma$  (3pts)

4. Donner **cinq** exemple de conséquence logique à partir de la **Table 1**  $\alpha \wedge \beta \models \alpha$     (1pt)  
 Pour générer d'autres exemples, il suffit de choisir :  $\alpha \wedge \beta, \delta \models \alpha$  tel que  $\delta \in \{\alpha \vee \beta, \neg \alpha \vee \beta, \alpha \vee \neg \beta, \alpha \rightarrow \beta, \neg \alpha \rightarrow \beta, \dots\}$  comme vous pouvez choisir d'autres exemples  
 5. Quel est le connecteur correspondant ( $\downarrow$ ) pour que  $\models \alpha \downarrow \beta \downarrow \gamma$  tel que :  $\downarrow \in \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ .    **V**    (1pt)  
 6. Quel est le connecteur correspondant ( $\downarrow$ ) pour que  $\alpha \downarrow \beta \downarrow \gamma$  est insatisfiable tel que :  $\downarrow \in \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ .     **$\wedge$**     (1pt)

Bon courage