Première partie

Modélisation des problèmes en programmes linéaires notés PL

01. Un grossiste doit livrer 24 unités d'un produit déterminé P à trois détaillants D_1, D_2, D_3 tout en respectant les contraintes de marché suivant.

a) La quantité de P livrée aux détaillants D_2 et D_3 n'excède pas 9 unités.

b) la quantité de P livrée aux détaillant D_1 doit être au moins égale à deux fois la quantité expédiée au détaillant D_2 augmentée de 6 unités.

Les coûts de livraison d'une unité de P s'élèvent à 4 unités monétaires pour D_1,
2 pour D_2 et 3 pour D_3 (Unité monétaire = 1000 DA).

Dans ces conditions, quelles quantités le grossiste va t- il envoyer à chacun des détaillants ?

02. Un boulanger a la possibilité de faire trois types de gâteaux G_1, G_2 et G_3. Il utilise à cet effet de la farine (E_1), du beurre (E_2), des œufs (E_3), du sucre (E_4) et de la levure (E_5). Les quantités a_{ij} de l'éléments E_i intervenant dans l'élaboration du gâteau G_j sont données dans le tableau ci dessous :

	G_1	G_2	G_3
E_1	1	1	2
E_2	1	2	1
E_3	2	1	1
E_4	1	2	0
E_5	1	2	2

Le boulanger dispose de 20 unités de E_1, 10 de E_2, 20 de E_3, 20 de E_4 et 10 de E_5.

Les bénéfices unitaires valent respectivement 2 pour G_1 , 5 pour G_2 et 7 pour G_3 .

Ecrire le programme linéaire qui détermine le nombre de gâteaux à confectionner de façon à maximiser le bénéfice total.

03. Une usine a reçu des plaques de métal d'une largeur de 200 cm et d'une longueur de 500 cm. Il faut en fabriquer au moins 30 plaques de largeur de 110 cm , 40 plaques de largeur de 75 cm et 15 plaques de largeur de 60 cm .

Donner le modèle mathématique pour que les déchets soient les plus petits possibles .

04. Un restaurateur peut offrir deux types de plats indifféremment. Des assiettes à 80 DA, contenant 05 sardines, 2 merlans et 01 rouget. Des assiettes à 120 DA, contenant 03 sardines, 03 merlans et 03 rougets. Il dispose de 30 sardines, 24 merlans et 18 rougets. Comment doit-il disposer pour réaliser la recette maximale ?

05. Une entreprise de boissons gazeuses fabrique deux types de boissons, « boisson_a et boisson_b ». Le type boisson_a est de meilleur qualité. Le bénéfice net est de 3 DA pour une bouteille de boisson_a et de 2 DA pour le second type. Le temps de fabrication pour le premier type de boisson est deux fois le temps de fabrication pour le second type. Si toutes les bouteilles sont de type boisson_b elle peut fabriquer 10000 par jour. L'approvisionnement en sucre est suffisant pour 8000 bouteilles par jour (type boisson_a ou boisson_b). On dispose quotidiennement de 4000 bouchons de type boisson_a et 7000 bouchons de type boisson_b. Quels sont les nombres respectifs de bouteilles des deux types à fabriquer chaque jour de manière à maximiser le bénéfice total de l'entreprise ? Ecrire la formulation mathématique.

06. Une compagnie a deux catégories d'inspecteurs notés 1 et 2. On veut les affecter à une opération de contrôle de qualité. Il est nécessaire d'inspecter mille pièces par journée de travail qui dure 08 heures. Les inspecteurs de $1^{\text{ère}}$ catégorie peuvent inspecter des pièces à raison de 25 par heure avec une précision de 98%, quant aux autres ils vérifient 15 pièces heures avec une précision de 95%.
Le salaire d'un inspecteur de $1^{\text{ère}}$ catégorie est de 100 DA/ heure alors que celui de la seconde est de 70 DA/ heure. A chaque erreur commise par un inspecteur, le coût de perte est de 50 DA pour la compagnie. Cette dernière a 11 et 19 inspecteurs respectivement de $1^{\text{ère}}$ et de 2^{nd} catégorie. Ecrire le modèle qui affecte optimalement ces inspecteurs (qui minimise le coût d'inspection).

07. Un problème de transport.
Une entreprise stocke un produit dans trois dépôts A_1, A_2 et A_3. Les quantités stockées sont respectivement a_1, a_2 et a_3. Les dépôts doivent alimenter quatre magasins de vente B_1, B_2 , B_3 et B_4. La quantité du produit nécessaire au point de vente B_i est b_i ($i = 1,\ldots, 4$). Comment l'entreprise doit-elle répartir les stocks entre les points de vente ou quelle quantité le dépôt A_i doit-il livrer au point de vente B_j ?
08. Un problème de répartition de ressources.

Une entreprise peut produire différents biens. Chaque bien est repéré par un indice « j ». Pour réaliser sa production, elle utilise des matières premières, des machines, de la main d'œuvre, c'est à dire des ressources mesurées en unités appropriées. Ces ressources, ou facteurs de production, sont disponibles en quantité limitée ; soit b_i la quantité disponible de la ressource « i ». On sait par ailleurs, quelle quantité a_{ij} la production d'une unité du bien « j » nécessite une ressource « i ». Supposons que la production soit à rendement constant, c'est à dire que la production de x_j unités du bien « j » exige a_{ij} x_j unités de la ressource « i ». Ecrire un programme de production de l'entreprise sous forme de programme linéaire.

09. Constitution de deux carburants par mélange de quatre corps.
Une raffinerie prépare deux carburants pour automobiles en mélangeant quatre constituants : l'isopentane, la gasoline, le réformat et le platformat. La composition volumétrique de ces deux carburants est donnée par le tableau ci-dessous :

CONSTITUANTS	**CARBURANT N°1 (%)**	**CARBURANT N°2 (%)**
Isopentane	20	10
Gasoline	30	10
Reformat	30	60
Platformat	20	20

Elle dispose de : 9000 m^3 d'isopentane, 14000 m^3 de platformat. Les quantités de gasoline et de reformat ne sont pas limitées. La raffinerie doit nécessairement utiliser : Au moins 6000 m^3 de gasoline et au moins 18000 m^3 de reformat. Son profit est de 6000 DA/ m^3 pour le carburant n°1 et de 5000DA/m^3 pour le second carburant. Quels mélanges doit-elle réaliser pour obtenir le bénéfice maximal ?

10. Une usine fabrique trois sortes de pièces (p_1, p_2, p_3) à l'aide de deux machines (m_1, m_2). Chaque pièce en cours de fabrication doit passer successivement sur les deux machines dans un ordre indifférent et pendant les temps suivants (en minutes)

Machines	Temps d'usinage (minutes par pièce)		
	P_1	P_2	P_3
M_1	2	4	3
M_2	6	12	3

La machine m_1 est disponible 8 heures, la machine m_2 est disponible 10 heures. Le profit réalisé sur une pièce p_1 est de 50 DA, sur une pièce p_2 est de 80 DA, celui réalisé sur une pièce p_3 est de 60 DA. Combien doit-on fabriquer de pièces p_1, p_2 et p_3 pour avoir un profit total maximum ? Donner un modèle mathématique du problème.

11. Une usine peut fabriquer trois produits A, B et C. Les prix de vente et les frais de fabrication sont donnés par le tableau suivant :

	A	B	C
Prix de vente/ DA pour une unité	200	270	250
Frais de production/ DA pour une unité	160	210	220

Pour la production de chaque produit quatre différent groupes de machines I, II, III et IV sont nécessaires avec les périodes de travail suivant :

	I	II	III	IV
Période pour une unité de A/ heures	1	1	2	1
Période pour une unité de B/ heures	4	1	3	4
Période pour une unité de C/ heures	2	4	1	1

Le temps disponible de chaque groupe de machines est borné : 210 heures pour le groupe I, 160 pour II, 210 pour le III et 205 heures pour le groupe IV.
Donner un modèle mathématique pour maximiser le profit.

12. Une usine peut fabriquer trois produits A, B et C. Elle dispose de 205 heures de travail pour cette production. Cette dernière est donnée par le tableau suivant :

	A	B	C
Temps de fabrication pour une pièce	1	3	2
Frais de fabrication pour une pièce	160	210	220
Prix de vente pour une pièce	200	270	250

Avec les conditions suivantes. On doit fabriquer au maximum 100 pièces de A et au minimum 30 pièces de C, il faut avoir de B au moins 1/3 de pièces de C.

Donner un modèle mathématique de maximisation du profit.

13. Problème de Mélange

Il faut mélanger trois gaz de telle manière que le gaz mixte soit le plus bon marché que possède un pouvoir calorifique entre plus de 1700 et 2000 k. cal/ m^3 et un taux de sulfure au plus de 2,8 g/ m^3. Indications sur les trois gaz :

Gaz	Pouvoir calorifique en k. cal/ m^3	Taux de sulfure En g/ m^3	Prix en DA
1	1000	6	100
2	2000	2	250
3	1500	3	200

Ecrire le modèle mathématique de ce problème.

14. Problème de nutrition

On se propose de fournir quotidiennement et à chaque individu d'une population un minimum de 70 g de protéines, 3000 unités de calories, 800 mg de calcium et 12 mg de fer. Les produits disponibles sont le pain, le beurre, le fromage, les pois et les épinards. Les prix par 100 g de ces produits sont respectivement de 5, 34, 40, 10 et 5 DA. Le problème est de constituer, aux moindres frais, des rations quotidiennes respectant les exigences du régime imposé.

Les quantités de protéines (en g), de calories (en unités), de calcium (en mg) et de fer (en mg) par 100 g de ces aliments sont donnés dans le tableau suivant :

	Protéines	Calories	Calcium	Fer
Pain	10	300	50	4
Beurre	30	1800	400	-
Fromage	35	800	450	-
Pois	20	1500	750	4
Epinards	25	300	120	15

15. Une usine possède trois tours, qui au cours d'un mois, peuvent être utilisés pendant les temps indiqués dans le tableau ci dessous. Quatre pièces peuvent être usinées sur ces machines. Les quantités de chaque pièce à fabriquer au cours du mois sont fixées de façon impérative et sont indiquées dans le tableau. Le temps d'usinage en heures par pièce figurent également .

Tours	Temps d'usinage (heures par pièces)				Heures de disponibilité des machines
	I	II	III	IV	
A	3	3	2	5	80
B	4	1	1	2	30
C	2	2	3	1	130
Productions exigées (nombre au moins de pièces)	10	40	50	20	

Ecrire un programme linéaire pour réduire au minimum l'utilisation des machines. Quel sera le programme d'affectation de diverses fabrications aux diverses machines.

16. Une usine peut fabriquer quatre sortes de bureaux. La fabrication requiert un certain temps de travail dans l'atelier des composants, un certain temps de travail dans l'atelier d'assemblage et un certain temps dans l'atelier de finition. Ces temps sont donnés par :

Bureaux	Composants	Montage	Finition
A	1	2	0
B	3	1	1
C	1	2	4
D	1	1	1

Le profit réalisé sur la vente de chacun de ces bureaux est respectivement de 900 DA, 1800 DA, 1400 DA et 450 DA. On désire maximiser le profit sachant qu'on ne dispose que de 4500, 4000 et 3000 unités de travail dans les ateliers de composants, de montage et de finition respectivement.

Ecrire le problème linéaire correspondant à ce problème.

17. Une usine produits des autos et des camions. Elle comprend trois ateliers qui travaillent simultanément sur les autos et les camions dans les conditions suivantes :

Atelier I- Moteurs

Un moteur d'auto demande à cet atelier 4/3 d'heures de travail. Le même temps est nécessaire pour fabriquer un moteur de camion.

Atelier II- Carrosserie

Une carrosserie d'auto demande ½ heure de travail et une carrosserie de camion demande 3 heures de travail.

Atelier III- Assemblage

L'assemblage d'une auto demande 8/7 d'heures, celui d'un camion demande 5 /2 d'heures.

1) Supposons que l'atelier III puisse assembler tout ce que produit les ateliers I et II. Quelle production mensuelle de l'usine conduira à faire travailler les ateliers I et II au rythme de 200 heures par mois ?
2) La production trouvée en 1) est-elle possible si l'atelier III dispose au maximum de 200 heures de travail ?
3) Sachant que les trois ateliers ne disposent que de 200 heures de travail au plus. Déterminer graphiquement le domaine de productions réalisables.
4) Les trois ateliers ne disposent que de 200 heures de travail et le bénéfice sur une auto et sur un camion étant respectivement de 120 mille dinars et 160 mille dinars. Déterminer quelle production rendra ce bénéfice le plus grand possible.

18. Une entreprise possède trois usines situées respectivement à Boufarik, Blida et Médéa. Elle importe un métal, du cuivre, non disponible sur le marché interne qui lui est acheminé vers deux ports celui d'Alger et d'Oran. Les quantités de cuivre nécessaires aux usines respectives sont de 400, 500 et 600 tonnes tandis que les quantités disponibles sont de 500 et 300 tonnes par semaine respectivement à Alger et Oran. Les coûts unitaires de transport en dinars sont donnés par le tableau suivant:

	Boufarik	Blida	Médéa
Alger	500	600	700
Oran	1000	900	800

L'unité étant la tonne de cuivre à transporter. Ecrire le programme linéaire associé à un plan de transport à coût minimale.

19. Une rivière dont le débit est de 10 000 m^3/ jour contient trois polluants A, B et C. P_A, P_B et P_C désignent les quantités (en kg/ m^3) des polluants A, B, C que contient la rivière. On peut utiliser pour la dépollution trois traitements dont l'efficacité et le coût sont donnés par le tableau suivant :

	Traitements		
Polluants	1	2	3
A	0.6	0.1	0.07
B	0.7	0.12	0.1
C	0.9	0.5	0.5
Coûts (DA:/ 1000 m^3)	3	10	18

ce tableau s'interprète ainsi : si x m^3 sont traités par le traitement 1, ces x m^3 contiendront après traitement 0.6x P_A de polluant A, 0.7 x P_B de polluant B et 0.9 x P_C de polluant C. Le coût de ce traitement sera 0.003 x DA. On peut traiter n'importe quelle quantité de flux par chacun des traitements.
Sachant qu'on le désire que le niveau de pollution de la rivière ne dépasse pas $\overline{P}_A$, $\overline{P}_B$ et $\overline{P}_C$(exprimés en kg/ m^3) respectivement pour chacun des polluants. Exprimer sous forme de P.L le problème consistant à déterminer quelles quantités d'eau doit traiter quotidiennement par chacun des traitements.

20. Une ville A produit quotidiennement 500 tonnes d'ordures ménagères, une autre ville B produit 400 tonnes. Les ordures doivent être incinérées à l'incinérateur 1 ou à l'incinérateur 2 qui peuvent traités respectivement jusqu'à 500 tonnes par jour.
Le coût de l'incinération des ordures est de 40 DA par tonne à l'incinérateur 1, et de 30 DA la tonne à l'incinérateur 2. L'incinération des ordures réduit chaque tonne de déchets à 0.2 tonnes de débris, qui seront enfouis dans deux terrains vagues. Chaque terrain vague peut recevoir au plus 200 tonnes de débris par jours. Il coûtera 3 DA le kilomètre pour transporter une tonne de déchets (ordures ou débris). Les distances entre les différents lieux sont données par le tableau ci dessous.

Formuler ce problème comme celui de la programmation linéaire pour minimiser le coût total de prélèvement des ordures ménagères des deux villes A et B.

	Incinérateur 1	**Incinérateur 2**
Ville A	30	5
Ville B	36	42
Terrain vague 1	5	9
Terrain vague 2	8	6

21. Programme de raffinerie

Une raffinerie peut traiter trois pétroles bruts appelés brut_1, brut_2 et brut_3 originaires de trois pays différents. Par distillation fractionnée dans les « toppings », ces pétroles bruts donnent des coupes qui sont des ensembles d'hydrocarbures ayant des températures d'ébullition comprises entre des limites fixées.

Un « topping » permet d'obtenir :

- des gaz et gaz liquéfiés
- Une gazoline ou coupe 0-80°c(hydrocarbures dont le point d'ébullition est compris entre 0 et 80°c)
- Une benzine ou coupe 80-130°c
- Un naphta léger ou coupe 130-160°c
- Un naphta lourd ou coupe 160-190°c
- Un kérosène ou coupe 190-230°c
- Un gasoil léger ou coupe 230-310°c
- Un gasoil lourd ou coup 310-400°c
- Un fuel-oil ou coupe > 400°c

Ces coupes subissent ensuite des traitements complémentaires (épuration, désulfuration, cracking, reforming catalytique) pour devenir des bases qui, convenablement mélangées, permettront d'obtenir les produits commerciaux désirés.

La raffinerie considérée fabrique cinq catégories de produits finis : des gaz et gaz liquéfiés, des essences, du pétrole, du gasoil et du fuel-oil. Les rendements des pétroles bruts traités sont précisés par le tableau ci-après (qui explicite les quantités produites à partir de 100 tonnes de brut) :

Matière première Production	Brut_1 (tonnes)	Brut_2 (tonnes)	Brut_3 (tonnes)
Gaz et gaz liquéfiés	2	6	6
Essences	20	25	30
Pétroles	8		4
Gasoil	40	25	30
Fuel-oil	30	50	30
Total	100	100	100

La raffinerie peut produire au maximum, au cours d'une année :
300 000 tonnes de gaz et gaz liquéfiés, 1 050 000 t d'essences , 180 000 t de pétrole,
1 350 000 t de gasoil et 1 800 000 t de fuel-oil.
Elle réalise un bénéfice de 4000 DA par tonne de brut_1 mise en œuvre, 5000 DA par tonne de brut_2 et 6000 DA par tonne de brut_3 mise en œuvre. Quelle quantité de chacun des bruts devra-t-elle traiter pour réaliser le bénéfice total maximal ? Ecrire le programme correspondant.

22. Une entreprise est spécialisée dans le montage et la commercialisation de magnétoscopes et de téléviseurs.
Le montage d'un téléviseur nécessite 3000 DA de composants et 0,5 heure de main d'œuvre. Le montage d'un magnétoscope nécessite 2000 DA de composants et 01 heure de main d'œuvre. L'entreprise est soumise à un certain nombre de contraintes.

- elle peut consacrer au plus 2 560 000 DA par semaine au financement de ses approvisionnements en composants;
- dans ses ateliers, elle emploie 20 salariés qui travaillent chacun 39 heures par semaine;
- d'autre part, le marché de ces produits est tel que l 'entreprise ne peut envisager de produire plus de 600 téléviseurs et plus de 600 magnétoscopes par semaine, sous peine de ne pouvoir les commercialiser.

a) L'entreprise dispose-t-elle de la main d'œuvre suffisante pour assurer une production hebdomadaire de 400 téléviseurs et de 600 magnétoscopes ?

b) L'ensemble des contraintes de l'entreprise permet-il d'assurer une production de 600 téléviseurs et de 400 magnétoscopes

c) Ecrire l'ensemble des contraintes de l'entreprise que la production hebdomadaire de x téléviseurs et y magnétoscopes doivent vérifier. Le représenter graphiquement.

d) On admet que l'entreprise vend la totalité de sa production en réalisant un bénéfice de 1500 DA par téléviseur et de 2000 DA par magnétoscope.

D'après le graphique, l'entreprise peut-elle assurer une production hebdomadaire qui lui permettent de réaliser un bénéfice de 1 900 000 DA ? Justifier la réponse.

e) A partir de lectures graphiques, citer deux exemples de production réalisables qui lui assurent un bénéfice supérieur à 1 700 000 DA.

23. Le gérant d'un hôtel souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de 90 draps de bain, 240 serviettes et 240 gants de toilette.

Une première entreprise de vente lui propose un lot A comprenant 2 draps de bain, 4 serviettes et 8 gants de toilettes pour 200 DA. Une deuxième entreprise vend pour 400 DA un lot B de 3 draps de bain, 12 serviettes et 6 gants de toilette. Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots A et y lots B.

Traduire par un système d'inéquations les contraintes auxquelles satisfont x et y et les représenter dans un plan rapporté à un repère orthonormé où un point M du plan est de coordonnées (x, y).

24. Une verrerie produit des verres à café, des verres à thé et des verres à eau. Les prix de vente, les quantités requises de verre ainsi que les temps de façonnage et d'emballage sont différents pour chacun des produits et sont donnés dans le tableau suivant :

	Verres à café	Verres à thé	Verres à eau
Temps de façonnage (min)	4	2	12
Temps d'emballage (min)	2	1	4
Quantité de verre (kg)	0.1	0.15	0.1
Prix de vente (DA)	8	6	15

Pour la semaine à venir, l'entreprise dispose de 3000 minutes pour le façonnage, de 1200 minutes pour l'emballage et de 100 kilogrammes de verre.

a. Formuler un programme linéaire aidant l'entreprise à déterminer une production maximisant son chiffre d'affaires.

25. Un artisan fabrique des objets A et des objets B.

La réalisation d'un objet A demande 30 DA de matière première et 125 DA de main-d'œuvre.

La réalisation d'un objet B demande 70 DA de matière première et 75 DA de main-d'œuvre.

Les profits réalisés sont de 54 DA par objet A, et de 45 DA par objet B.

Les contraintes économiques sont que la dépense journalière en matière première ne doit pas dépasser 560 DA. La dépense journalière en main-d'œuvre ne doit pas dépasser 1250 DA.

a. traduire ces deux contraintes.

b. Le plan est reporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité graphique 1 cm ou 1 carreau du papier millimétré). Représenter graphiquement l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient ces contraintes.

c. Exprimer le bénéfice journalier de l'entreprise puis la production journalière d'objet A et B qui assurerait un bénéfice maximum. Préciser cette production et en déduire le montant de ce bénéfice maximum.