TD 7 : Exercice corrigé

Algorithme du simplexe

Méthode des deux phases

<u>Exercice</u>

Résoudre par la méthode des deux phases le modèle de programmation linéaire suivant :

$$(P) = \begin{cases} Maximiser\ Z = 12x_1 + 20x_2 \\ s.c. \quad 6x_1 + 10x_2 \geq 60 \\ \quad 8x_1 + 25x_2 \geq 200 \\ \quad 2x_1 + 8x_2 \leq 80 \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Standardisation de (P) par ajout des variables d'écart :

$$(P_s) = \begin{cases} Maximiser\ Z = 12x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ s.c. \quad 6x_1 + 10x_2 - x_3 = 60 \\ \quad 8x_1 + 25x_2 - x_4 = 200 \\ \quad 2x_1 + 8x_2 + x_5 = 80 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

b) Peut-on obtenir une solution de base réalisable de départ avec le système d'équations obtenu en a) ?

Nous avons 5 variables et 3 équations ; donc, nous devons annuler

(n-m)=(5-3)=2 variables.

Annulons les 2 variables de décision : $x_1 = x_2 = 0$

$hors\,base = \{x_1,\ x_2\};\qquad base = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$

Calculons les valeurs des variables de base

$x_3 = -60;\qquad x_4 = -200;\qquad x_5 = 80.$

La solution de base $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, -60, -200, 80).$

Cette solution n'est pas réalisable vu que les variables x_3 et x_4 sont nulles;

Donc, nous n'avons pas de S.B.R. de départ pour appliquer l'algorithme du simplexe.

a) Introduisez les variables artificielles et appliquer la méthode des deux phases.

$$(P_S) = \begin{cases} Maximiser\ Z = 12x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + x_7 \\ s.c. \quad 6x_1 + 10x_2 - x_3 + x_6 = 60 \\ \quad 8x_1 + 25x_2 - x_4 + x_7 = 200 \\ \quad 2x_1 + 8x_2 + x_5 = 80 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Après avoir introduit les variables artificielles, nous avons modifié profondément l'expression de la fonction objectif ; ceci va influencer la valeur de Z.

Pour cela nous allons appliquer la phase I de la méthode des deux phases en espérant une solution de base réalisable optimale qui serait la S.B.R. de départ du (P_S) et nous allons pouvoir entamer la phase II.

Ceci se ferait en minimisant la somme des valeurs des valeurs artificielles $Z^* = x_6 + x_7$ dans la Z.

$$(P_A) = \begin{cases} Min \quad Z^* = x_6 + x_7 \\ s.c. \quad 6x_1 + 10x_2 - x_3 + x_6 = 60 \\ \qquad 8x_1 + 25x_2 - x_4 + x_7 = 200 \\ \qquad 2x_1 + 8x_2 + x_5 = 80 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 0 : Phase I

	c_j	0	0	0	0	0	1	1		
C_B	**Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**Solution de base**	**Quotient**
1	x_6	6	10	-1	0	0	1	0	60	60/10 = 10
1	x_7	8	25	0	-1	0	0	1	200	200/25 = 8
0	x_5	2	8	0	0	1	0	0	80	80/8 = 10
	$z_j = C'_B x_J$	14	35	-1	-1	0	1	1	$Z^* = 260$	
	$c_j - z_j$	-14	-35	1	1	0	-1	-1		

Tableau 1 : Phase I

	c_j	0	0	0	0	0	1	1		
C_B	**Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**Sol de base**	**Quot**
0	x_2	6/10	1	-1/10	0	0	1/10	0	6	
1	x_7	-7	0	25/10	-1	0	-25/10	1	50	
0	x_5	-28/10	0	8/10	0	1	-8/10	0	32	
	$z_j = C'_B x_J$	-64/10	1	24/10	-1	0	-24/10	1	$Z^*=50$	
	$c_j - z_j$	64/10	-1	-24/10	1	0	24/10	-1		

Tableau 2 : Phase I

	c_j	0	0	0	0	0	1	1	
C_B	**Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**Sol de base**
0	x_2	8/25	1	0	-1/25	0	0	1/25	8
0	x_3	-14/5	0	1	-2/5	0	-1	2/5	20
0	x_5	-14/25	0	0	8/25	1	0	-8/25	16
$z_j = C'_B x_J$		0	0	0	0	0	0	0	$Z^* = 0$
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	0	0	

La valeur de la fonction $Z^* = 0$ et les variables artificielles sont éliminées de la base.

Donc, la phase II peut commencer avec la S. B. R.

$$x_0 = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (0, 8, 20, 0, 16)$$

Mais vérifions d'abord que x_0 vérifie le problème standard (P_s) :

$$(P_s) = \begin{cases} 6*0 + 10*8 - 20 = 60 \\ 8*0 + 25*8 - 0 = 200 \\ 2*0 + 8*8 + 16 = 80 \end{cases}$$

Phase II

Tableau 0 : Phase II

		c_j	12	20	0	0	0	
C_B	**Variables de base**		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**Sol de base**
20	x_2		8/25	1	0	-1/25	0	8
0	x_3		-14/5	0	1	-2/5	0	20
0	x_5		-14/25	0	0	8/25	1	16
$z_j = C'_B x_J$			160/25	20	0	-2/25	0	**$Z^* = 16$**
$c_j - z_j$			140/25	0	0	2/25	0	

Tableau 1 : Phase II

		c_j	12	20	0	0	0		
C_B	**Variables de base**		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**Sol de base**	**Quotient**
12	x_1		1	25/8	0	-1/8	0	25	----
0	x_3		0	35/4	1	-3/4	0	90	----
0	x_5		0	7/4	0	1/4	1	30	120
$z_j = C'_B x_J$			12	75/2	0	-3/2	0	**$Z^* = 300$**	
$c_j - z_j$			0	-35/2	0	3/2	0		

Tableau 2 : Phase II

c_j	12	20	0	0	0	
C_B **Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**Sol de base**
12 x_1	1	25/8	0	0	1/2	40
0 x_3	0	4	1	0	3	180
0 x_4	0	7	0	1	4	120
$z_j = C_B^{'} x_J$	12	75/2	0	0	6	**$Z^* = 480$**
$c_j - z_j$	0	-35/2	0	-3/2	0	

Tous les $c_j - z_j$ sont négatifs donc la solution est optimale :

$$x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (40,\ 0,\ 180,\ 120,\ 0)$$

$$Z^* = 480$$