Université IbnKhaldoun Tiaret **3ème Année Licence Informatique**

Faculté des Math & Informatique **Programmation Linéaire**

Département Informatique **<u>Examen Final corrigé</u>**.

<u>Exercice N°</u> 1 : (8 points)

Une entreprise qui fabrique des réfrigérateurs dispose de trois usines localisées aux sites S_1, S_2 et S_3.

La production annuelle de chaque usine pour un certain type de réfrigérateurs est la suivante :

Usine	Production annuelle
S_1	15 000 unités
S_2	12 000 unités
S_3	23 000 unités

Ces usines alimentent quatre points de ventes D_1, D_2, D_3 et D_4 dont la demande annuelle de chacune d'elles est donnée par le tableau suivant :

Usine	Demande annuelle
D_1	10 000 unités
D_2	5 000 unités
D_3	20 000 unités
D_4	15 000 unités

Les coûts unitaires de transport de chaque usine à chaque point de vente sont indiqués dans le tableau suivant :

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	5	6	6	8
S_2	11	9	4	7
S_3	12	7	8	5

Formulez le modèle de programmation linéaire qui permettrait d'obtenir un plan de transport à un coût minimum. ***<u>Solution</u>*** :

$$(P) = \begin{cases} \textit{Minimiser} \quad Z = 5x_{11} + 6x_{12} + 6x_{13} + 8x_{14} \\ \qquad + 11x_{21} + 9x_{22} + 4x_{23} + 7x_{24} \\ \qquad + 12x_{31} + 7x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34} \\ s.c. \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 15000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 12000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 23000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10\,000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 5\,000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20\,000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 15\,000 \\ \\ x_{ij} \ge 0, \; i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

<u>Exercice N° 2</u> : (12 points)

Résoudre à l'aide de la **<u>méthode des deux phases</u>** le modèle de P.L. suivant :

$$(P) = \begin{cases} \max \quad Z = 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ 2x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer la solution optimale de (P)?
2. Donner les valeurs des variables d'écarts, avec leur interprétation.
3. Structurer le programme dual (D) du programme primal (P) ci-dessus.
4. Donner les valeurs des variables duales directement du tableau optimal du primal.
5. vérifier que les valeurs des fonctions objectifs du primal et du dual sont égales .

Programme Primal (Correspond) Programme Dual

Max Z (ou W)	Min W (ou Z)
Nbre de contraintes à la contrainte i à la contrainte de type ≤ de type ≥ de type =	Nbre de variables duales Correspond la variable y_i $y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ y_i s.r.s.
Nbre de variables de décision $x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ x_j s.r.s.	Nbre de contraintes Contrainte de type ≥ Contrainte de type ≤ Contrainte de type =
Coefficient c_j dans la fonction objectif	Second membre pour la $j^{ème}$ contrainte
Second membre b_i de la $i^{ème}$ contrainte	Coefficient de la variable y_i dans la fct Objectif
Coefficient dans la contrainte i de la variable x_j (a_{ij})	Coefficient dans la contrainte j de la var y_i (a_{ji})

<u>Exercice N° 2 Solution :</u>

$$(P) = \begin{cases} \max \quad Z = 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ 2x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1° Standardisation de (P) :

$$(P) = \begin{cases} \max \quad Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 18 \\ 2x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Si nous prenons comme variables hors base les variables de décision $x_1 = x_2 = 0$, les variables de base seront x_3, x_4, x_5 avec comme solution de base $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}0{,}4{,}-18{,}12)$ mais cette solution de base n'est pas réalisable; donc nous ne pouvons pas démarrer l'algorithme du simplexe avec cette solution de base.

Nous devons obligatoirement trouver une solution de base réalisable pour commencer la résolution de (P) à l'aide de l'algorithme du simplexe. Deux méthode existent à cet effet, la méthode des deux phases et celle des pénalités. Nous allons utiliser la méthode des deux phases.

2° Ajout des variables artificielles :

$$(P_a) = \begin{cases} \max \quad Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 18 \\ 2x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Phase I : Tableau 1

	C_{aj}	0	0	0	0	0	1	
C_B	$V.B.$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	S.B.
0	x_3	1	0	1	0	0	0	**4**
1	x_6	3	2	0	-1	0	1	**18**
0	x_5	0	2	0	0	1	0	**12**
	Z'_{aj}	3	2	0	-1	0	1	Z'_a =18
$C'_{aj} - Z'_{aj}$		-3	-2	0	1	0	-1	

Phase I : Tableau 2

	C_{aj}	0	0	0	0	0	1	
C_B	$V.B.$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	S.B.
0	x_1	1	0	1	0	0	0	**4**
1	x_6	0	2	-3	-1	0	1	**6**
0	x_5	0	2	0	0	1	0	**12**
		0	2	-3	-1	0	1	

Z'_{aj}							$Z'_a = 6$
$C'_{aj} - Z'_{aj}$	0	-2	3	1	0	0	

Phase I : Tableau 3

	C_{aj}	0	0	0	0	0	
C_B	$V.B.$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S.B.
0	x_1	1	0	1	0	0	**4**
0	x_2	0	1	-3/2	-1/2	0	**3**
0	x_5	0	0	3	1	1	**6**
	Z'_{aj}	0	0	0	0	0	$Z'_a = 0$
$C'_{aj} - Z'_{aj}$		0	0	0	0	0	

La fonction objectif $Z'_a = 0$ est nulle donc le critère d'arrête est vérifié. Cette solution de base réalisable est optimale de (P_a) et est solution de base réalisable du problème initial (P).

Donc on peut démarrer la résolution du problème origine (P_a), l'aide de l'algorithme du simplexe avec cette S.B.R. : $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4,3,0,0,6)$.

Phase II : Tableau 1

	C	3	5	0	0	0	
C_B	$V.B.$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S.B.
3	x_1	1	0	1	0	0	**4**
5	x_2	0	1	-3/2	-1/2	0	**3**
0	x_5	0	0	3	1	1	**6**
	Z	3	5	-9/2	-5/2	0	$Z = 27$
$C - Z$		0	0	9/2	5/2	0	

Phase II : Tableau 2

	C	3	5	0	0	0	
C_B	$V.B.$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S.B.

3	x_1	1	0	0	-1/3	-1/3	**2**
5	x_2	0	1	0	0	1/2	**6**
0	x_3	0	0	1	1/3	1/3	2
	Z	3	5	0	-1	3/2	
$C-Z$		0	0	0	1	-3/2	$Z=36$

Phase II : Tableau 3

	C	3	5	0	0	0	
C_B	$V.B.$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S.B.
3	x_1	1	0	1	0	0	**4**
5	x_2	0	1	0	0	1/2	**6**
0	x_4	0	0	3	1	1	6
	Z	3	5	3	0	5/2	
$C-Z$		0	0	-3	0	-5/2	$Z=42$

La solution optimale de (P) est : $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4,6,0,6,0)$ *et* $Z^* = 42$,

2. Donner les valeurs des variables d'écarts, avec leur interprétation : $(x_3, x_4, x_5) = (0,6,0)$:

- $x_3 = 0$ veut dire que la ressource b_1 a été consommée totalement,
- $x_4 = 6$ veut dire qu'après production il reste 6 unités de la ressource b_2 ,
- $x_5 = 0$ veut dire que la ressource b_3 a été consommée totalement.

3. Structurer le programme dual (D) du programme primal (P) ci-dessus.

$$(D) = \begin{cases} \min \quad W = 4y_1 + 18y_2 + 12y_3 \\ \quad y_1 + 3y_2 \leq 3 \\ \quad 2y_2 + 2y_3 \leq 5 \\ \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \leq 0, \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$

4. Donner les valeurs des variables duales directement du tableau optimal du primal.

$$y_1 = 3, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 5/2$$

5. Vérifier que les valeurs des fonctions objectifs du primal et du dual sont égales .

$$W = 4y_1 + 18y_2 + 12y_3 = 4*3 + 18*0 + 12*5/2 = 42 = Z^*$$