Département mathématique à l'université Ibn Khaldoun Tiaret
TD – Analyse complexe

Licence mathématique – L2– (2018–2019)

Exercise 1 :

1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$a)\frac{1-2i}{1+2i}, \quad b)(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{10}, \quad c)(1+i\sqrt{3})^5$$

2. Écrire les nombres suivants sous forme trigonométrique :

$$a)\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}, \quad b)(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{10}, \quad c)\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}} \quad d)\frac{3i}{2+2i\sqrt{3}}$$

3. Calculer les racines $5^{\text{ème}}$ des nombres suivants :

$$a)\ i, \quad b)\ 1, \quad c)\ 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$$

4. Calculer les valeurs principale des nombres suivants dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$:

$$a)(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^4, \quad b)\ -1-i$$

Exercise 2 :

1. Trouver z_1 et z_2 les deux solution de système suivant :

$$\begin{cases} iz_1 + 2z_2 &= 1+9i \\ \\ 2z_1 + iz_2 &= -2+8i \end{cases}$$

2. Montrer que $z_2 - z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2})$
3. Déterminer la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

Exercise 3 : Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{llll} iz^2 & -(3-4i)z & -1-7i & = 0 \\ iz^2 & -(1-2i)z & +2(1+i) & = 0 \\ z^2 & -5z & +7 & = 0 \\ z^4 & -4z^2 & -77 & = 0 \end{array}$$

Exercise 4 : Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{z\to(1+i)} \dfrac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2},\ b)\ \lim\limits_{z\to(1+i)} (\dfrac{z-1-i}{z^2-2z+2})^2,\ c)\ \lim\limits_{z\to 2e^{\frac{\pi}{3}i}} \dfrac{z^3+8}{z^4+4z^2+16},$
$d)\ \lim\limits_{z\to e^{\frac{\pi}{3}i}} \dfrac{z}{z^3+1}(z-e^{\frac{\pi}{3}i})$

Exercise 5 : Étudier la dérivation de ces fonctions :

$f(z)=x^2+iy,\ h(z)=\dfrac{4z}{z^2+1},\ g(z)=z^2,\ K(z)=\dfrac{2}{z^2-iz-i}$

Exercise 6 : On pose $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$

1. Montrer que :
$$sin(z)=sin(x)ch(y)+i.cos(x)sh(y)$$
$$cos(z)=cos(x)ch(y)-i.sin(x)sh(y)$$
2. Déterminer les constantes a,b et c tq $f(z)=x+ay+i.(bx+cy)$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$
3. Déterminer les constantes a,b tq $f(z)=cos(x)(2ch(y)+ash(y))+i.sin(x)(2ch(y)+bsh(y))$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$
Quelle est alors expression de f en fonction de z ?

Exercise 7 : Soit $\gamma:[0,2]\to C$ avec $\gamma(t)=t^2+it$
Calculer la longueur de γ.

Exercise 8 :

1. Déterminer la paramétrisation de γ, le rectangle ABCD avec
$A=-R,\ B=R,\ C=R+2\pi i$ et $D=-R+2\pi i$ ou $R>0$
2. Calculer la longueur de γ.