FICHE TD : N^{0}2

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1− On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = f(2+2t, t^2)$.
Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

2− On définit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\psi(u,v) = f(uv, u^2 - v^2)$.
Démontrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

3− On veut trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient l'équation suivante :

$$v\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) + u\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) = 0 \qquad (E)$$

⋆ écrire l'équation (E) en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, u et v.

⋆ Déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré r si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, f(tx,ty) = t^r f(x,y).$$

1. Montrer que si f est homogène de degré r, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r-1$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2$ on a
$$|f(x) - f(y)| \leq \| x - y \|^2 .$$
Démontrer que f est constante. Montrer que si f est homogène de degré r si et seulement si :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = rf(x,y).$$
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que :
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = r(r-1)f(x,y).$$

Exercice 3

On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = a,$$

où a est un réel.

1. On pose f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(u,v) = g(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}).$$
En utilisant le théorème de composition, montrer que $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{a}{2}$.
2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f.
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.