# FICHE TD : N$^o$1

## Exercice 1 :

On rappelle que si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n,\ n \geq 1$, alors

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \text{et} \ \ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

$(a)$ Vérifier les propriétés caractéristiques d'une norme pour $\|x\|_1$ et $\|x\|_\infty$.

$(b)$ Vérifier que : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty,$$

avec $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$, que peut-on-déduire ?.

$(c)$ Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée

$$B_f = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ \|x\| \leq 1\}$$

par chacune des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$

## Exercice 2 :

Calculer les limites des fonctions suivantes en $(0,0)$, en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ y = r\sin\theta & r \geq 0 \end{cases}$$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x+y|}{x^2 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Déduire la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

## Exercice 3

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$g(x,y) = |xy|^\alpha \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{|x|+|y|}\right) + 1 \quad \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0) \ \ \text{et} \ \ g(0,0) = m,$$

où $\alpha > 0$ et $m$ est un réel.

1. Trouver $m$ pour que $g$ soit continue.
2. Pour $m = 1$, trouver les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $g$ admet des dérivées partielles premières au point $(0,0)$.