Série d'exercices N°03

Séries de fonctions et séries entières

Exercice 1 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *la série de fonctions de terme général* $u_n(x) = x^2(1+x^2)^{-n}, x \in \mathbb{R}$.

1. *Calculer la somme* $S(x)$ *de la série* $\sum u_n$.
2. *La série est-elle uniformément convergente ?.*

Exercice 2 *Pour* $n \geq 1$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $u_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$

1. *Démontrer que la série* $\sum\limits_n u_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Démontrer que la convergence n'est pas normale sur* $\mathbb{R}_+$.
3. *Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle* $[a, +\infty[$ *avec* $a > 0$.
4. *La convergence est-elle uniforme sur* $\mathbb{R}_+$ *?.*

Exercice 3 *On considère la série de fonctions*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

1. *Prouver que* S *est définie sur* $I =]-1, +\infty[$.
2. *Prouver que* S *est continue sur* I.
3. *Prouver que* S *est dérivable sur* I, *calculer sa dérivée et en déduire que* S *est croissante sur* I.
4. *Quelle est la limite de* S *en* -1 *? en* $+\infty$ *?*

Exercice 4 *Soit la série entière*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

1. *Déterminer son rayon de convergence.*
2. *Posons* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$: $\quad\star$ *Calculer* $f\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 5 *Pour* $n \geq 1$, *on pose* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *et on s'intéresse à la série entière* $\sum\limits_{n\geq 1} S_n x^n$.

On note R *son rayon de convergence.*

1. *Démontrer que* $R = 1$.
2. *On pose, pour* $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \sum\limits_{n\geq 1} S_n x^n$. *Démontrer que pour tout* $x \in]-1, 1[$, *on a* $(1-x)F(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.
3. *En déduire la valeur de* $F(x)$ *sur* $]-1, 1[$.