$\boxed{\texttt{Série d'exercices N°02}}$

Séries numériques et suites de fonctions

Exercice 1 *Établir une comparaison avec des intégrales*

$$(a)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n \qquad (b)\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\sim\frac{2}{3}n\sqrt{n} \qquad (c)\ln(n!)\sim n\ln n \qquad (d)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln k}\sim\ln(\ln n).$$

Exercice 2 *Pour $n\geq 0$: on pose $u_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}$, $S_n=\sum\limits_{0\leq k\leq n}u_k$.*

1. *Calculer $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$.*
2. *Montrer que $\int_0^1 f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$*
3. *Calculer $S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$.*
4. *Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.*

Exercice 3 *Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :*

$1/\frac{nx}{1+n^2.x^2}, x\in\mathbb{R}$ $\quad 2/\frac{n+1}{n^2+x^2}, x\in\mathbb{R}$ $\quad 3/x.(1-x)^n, x\in[0,1]$

$4/\frac{\ln(1+nx)}{1+n.x}, x\in\mathbb{R}^+$ $\quad 5/\frac{\ln(1+nx^2)}{nx}, x\in]0,+\infty[$ $\quad 6/\sin(\frac{n+1}{n}.x), x\in\mathbb{R}$

Exercice 4 *Pour tout entier $n\geq 0$ et pour tout réel x on pose*

$$f_n(x)=\frac{nx^3}{1+nx^2}.$$

1. *Trouver la limite simple f de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$.*
2. *Calculer la norme infinie de $f-f_n$. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?.*
3. *Trouver la limite de la suite*
$$\left(\int_0^2 f_n(x)\,dx\right)_{n\geq 0}.$$

Exercice 5

1. *L'inégalité suivante est-elle vérifier ?*
$$\ln^2(k)\leq\int_k^{k+1}\ln^2(t)\,dt\leq\ln^2(k+1) \qquad 1\leq k\in\mathbb{N};\quad t\in[1,+\infty[.$$
2. *Par une intégration par aprties calculer*
$$\int_1^x\ln^2(t)\,dt.$$
3. *Donner un équivalent de*
$$\mathtt{V}_n=\sum_{k=1}^{k=n}\ln^2(k),\qquad \textit{quand}\quad n\longrightarrow+\infty.$$
4. *La série de terme général $\frac{1}{\mathtt{V}_n}$ est-elle convergente ?.*