Série d'exercices N°01

## Séries numériques

**Exercice 1** *Calculer les sommes suivantes :*

$1/\sum\limits_{n\geq1}\ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ $2/\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $3/\sum\limits_{n\geq1}\frac{3^n}{7^{n-2}}$ $4/\sum\limits_{n\geq1}\arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$ $5/\sum\limits_{n\geq1}\frac{n^2}{n!}$
$6/\sum\limits_{n\geq1}\frac{n^3}{n!}$ $7/\sum\limits_{n\geq1}\ln(1+\frac{1}{n})$ $8/\sum\limits_{n\geq1}\ln(1-\frac{1}{n^2})$ $9/\sum\limits_{n\geq2}\frac{1}{(n-1)(n+2)}$ $10/\sum\limits_{n\geq3}\frac{2n-1}{n^3-4n}$

**Exercice 2** *On considère la série* $\sum\limits_{n\geq0}\frac{\cos n}{2^n}$.

1. *Notons* $S_N=\sum_{n=0}^N\frac{\cos n}{2^n}$ *et* $T_N=\sum_{n=0}^N\frac{\sin n}{2^n}$. *Remarquer que* $S_N+iT_N$ *est la somme des termes d'une suite géométrique.*
2. *En déduire que la suite à termes complexes* $(S_N+iT_N)_{N\geq0}$ *est convergente, et calculer sa limite.*
3. *Montrer alors que :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos n}{2^n}=\frac{4-2\cos1}{5-4\cos1}.$$

**Exercice 3** *Déterminer la nature des séries suivantes :*

$1/\sum\limits_{n\geq1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ $2/\sum\limits_{n\geq0}\frac{n}{n^3+1}$ $3/\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ $4/\sum\limits_{n\geq0}5^n\sin(\frac{2}{9})^n$
$5/\sum\limits_{n\geq1}\frac{n!}{n^n}$ $6/\sum\limits_{n\geq1}\frac{(n!)^2}{n^2}$ $7/\sum\limits_{n\geq0}\frac{2n}{2^n}$ $8/\sum\limits_{n\geq2}\frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n\sqrt{n-1}}$
$9/\sum\limits_{n\geq0}\arctan(\frac{2n}{3n^2+1})$ $10/\sum\limits_{n\geq0}\frac{5^n+1}{2^n-1}$ $11/\sum\limits_{n\geq0}\frac{n^2}{2^n+2}$ $12/\sum\limits_{n\geq1}\frac{(\ln n)^n}{n!}$

**Exercice 4** *Préciser la nature des séries suivantes :*

$1/\sum\limits_{n\geq1}\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ $2/\sum\limits_{n\geq1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, x>0$ $3/\sum\limits_{n\geq1}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$ $4/\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
$5/\sum\limits_{n\geq1}\frac{2.4.6...2n}{n^n}$ $6/\sum\limits_{n\geq1}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$ $7/\sum\limits_{n\geq0}\exp(-\frac{n^2+1}{n+1})$ $8/\sum\limits_{n\geq2}\frac{(-1)^n}{\ln n}$
$9/\sum\limits_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$ $10/\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

**Exercice 5** *Soit* $(u_n)$ *une suite de réels positifs. On pose* $v_n=\frac{u_n}{1+u_n}$.

1. *Prouver que la fonction* $x\longmapsto\frac{x}{1+x}$ *est croissante sur* $[0,+\infty[$.
2. *Démontrer que les séries* $\sum\limits_n u_n$ *et* $\sum\limits_n v_n$ *sont de même nature.*

**Exercice 6** *Montrer que les séries de termes généraux*

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\quad et\quad v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

*ne sont pas de même nature, bien que* $u_n\sim v_n$.