Université IBN Khaldoun, Tiaret
Département de Mathématiques
Examen **D'ANALYSE 3**
Durée : 1h 30 min.

Exercice 1.

$I-$ Soit la suite numérique suivante

$$U_n = \frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)}.$$

1. Etudier la nature de $\sum_{n\geq 1} U_n$.
2. Calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)} \right).$$

$II-$ Établir une comparaison avec une intégrale

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \sim \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

Exercice 2. On considère les fonctions f_n définies de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = e^{-nx}.$$

1. Déterminer D l'ensemble de convergente de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Préciser la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur D.
3. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers f sur D.

Exercice 3. Soit α un nombre réel. Considérons la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto n^{\alpha} x e^{-nx} \end{cases}$$

$a.$ Trouver la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$b.$ Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence uniforme ?
$c.$ Pour quelles valeurs de α a-t-on

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Y a-t-il contradiction avec le resultat vu en cours.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Département de Mathématiques

Corrigé d'analyse 3

Exercice 1. (I :2pts+2pts, II :3pts)

I− 1. La nature de $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$.

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)}$ est convergente car est une somme de deux séries convergentes. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3}{2^n}$ une série géométrique de raison $\frac{1}{2^n}$.

Et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2}{n(n+1)}$ est de même nature que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2}{n^2}$ qui est une série de Riemann.

2. Calculons la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)} \right).$$

On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 3.\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \right) = 3,$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{2}{n+1} \right) = 2.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)} \right) = 5.$$

II− Soit la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $\quad x \in]0, +\infty[$.

f est croissante sur $]0, e[$ et décroissante sur $]e, +\infty[$. Alors pour $n \leq x \leq n+1$ on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ pour $n \geq 3$, on intégrant de n à $n+1$ on obtient que

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x}\, dx \leq \frac{\ln n}{n},$$

par récurrence on trouve

$$\sum_{k=4}^{n} f(k) \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x}\, dx \leq \sum_{k=3}^{n-1} f(k),$$

alors

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) - f(3) \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x}\, dx \leq \sum_{k=3}^{n} f(k) - f(n),$$

on déduit

$$\int_3^n \frac{\ln x}{x}\,dx + f(n) \leq \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x}\,dx + f(3),$$

de plus on a

$$\int_3^n \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2},$$

alors, on btient

$$\frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} + \frac{\ln n}{n} \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \leq \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} + \frac{\ln 3}{3},$$

d'où

$$1 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k}}{\frac{(\ln n)^2}{2}} \leq 1.$$

Exercice 2. (2pts+1pt+2pts)

1. $D = [0, +\infty[$, en effet

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 1, & si\ x = 0, \\ 0, & si\ x > 0, \\ +\infty, & si\ x < 0. \end{cases}$$

2. La limite simple de $(f_n)_n$ sur D est la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x = 0, \\ 0, & si\ x > 0. \end{cases}$$

3. Puisque f n'est pas conrinue sur D, alors la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 3.(2pts+2pts+2pts+2pts)

a. Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout n donc convergence vers 0. Si $x \in]0, 1]$, on a le produit d'une suite "puissance", $u_n = n^\alpha$, par une suite "exponentielle", $v_n = e^{-nx}$. On sait que l'exponentielle impose sa limite, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

b. On a donc sur $[0, 1]$:

$$d_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = n^\alpha x e^{-nx}.$$

La fonction d_n est dérivable, avec :

$$d_n'(x) = n^\alpha e^{-nx}(1 - nx).$$

On en déduit que d_n est croissante sur $[0, \dfrac{1}{n}]$, décroissante sur $[\dfrac{1}{n}, 1]$. Son maximum est donc :

$$M_n = d_n(\frac{1}{n}) = n^{\alpha-1}e^{-1}.$$

Il est clair que (M_n) tend vers zéro si et seulement si $\alpha < 1$. Ainsi il y a convergence uniforme de (f_n) vers f si et seulement si $\alpha < 1$.

c. Par la question précédente, on est assuré que pour $\alpha < 1$, on aura bien :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

Mais la condition de convergence uniforme pour pouvoir passer la limite sous le signe somme est une condition suffisante. On n'a jamais dit qu'elle était nécessaire. C'est ce qui va apparaître ici. Dans cet exemple, on peut calculer sans problème les intégrales :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = n^\alpha \int_0^1 xe^{-nx}\,dx,$$

Il suffit en effet de poser $u(x) = x$, $v'(x) = e^{-nx}$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\dfrac{e^{-nx}}{n}$, et d'appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\,v(x)\,dx,$$

on en déduit :

$$\int_0^1 xe^{-nx}\,dx = \left[-\frac{xe^{-nx}}{n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{n}\,dx,$$

ce qui donne :

$$\int_0^1 xe^{-nx}\,dx = \left[-\frac{e^{-n}}{n} - \frac{e^{-nx}}{n^2}\right]_0^1 = \frac{1}{n^2} - \frac{e^{-n}}{n} - \frac{e^{-n}}{n^2}.$$

Finalement :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^{\alpha-2} - n^{\alpha-1}e^{-n} - n^{\alpha-2}e^{-n}.$$

Pour le passage à la limite en n, les deux derniers termes ne posent pas problème puisque l'exponentielle impose la convergence vers 0. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2},$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \alpha < 2.$$

Ainsi on peut permuter limite et intégrale pour tout $\alpha < 2$ alors qu'on a convergence uniforme seulement pour $\alpha < 1$.