CHAPITRE I

FONCTIONS DE DISTRIBUTION ET DE REARRANGEMENT

I Introduction.

D′une manière générale, l′espace dont les éléments sont des fonctions, est appelé espace fonctionnel. Par exemple on peut citer l′espace fonctionnel de Lebesgue L_p, l′espace fonctionnel D constitué par les fonctions de base (dans la théorie des distributions) et autres. Les espaces fonctionnels sont appliqués dans différents domaines de mathématiques, par exemple dans la théorie des opérateurs, aux équations aux dérivées partielles. Notre programme comprend l′étude de plusieurs espaces fonctionnels et certaines applications, à savoir, les espaces de Marsinkevich (espaces faibles), les espaces de Morrey, ceux de Nikolsky et de Besov.

On peut consulter les livres suivants :

1. H. Brezis. Analyse fonctionnelle et applications.

2. A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin. Eléments de la théorie des fonctions et d′analyse fonctionnelle.

3. L.V. Kantorovich, G.P. Akilov. Analyse fonctionnelle. 2ème edition, M; Nauka, 1977.

On commence par considérer deux notions, les fonctions de distribution et de réarrangement qui seront nécessaires par la suite.

II Fonctions de distribution.

Définition 0.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E ensemble mesurable, tel que $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction mesurable. La fonction λ_f est dite une fonction de distribution de f,*

si $\forall\ \sigma \in [0, \infty)$, l'égalité suivante est vérifiée

$$\lambda_f(\sigma) = mes\{x \in E : |f(x)| > \sigma\}. \tag{1}$$

Proprietés 0.2

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$, E un ensemble mesurable, $mesE < \infty$ et $f : E \to \mathbb{C}$, une fonction mesurable. Alors

1) $\lambda_f(\sigma) = \lambda_{|f|}(\sigma)$;

2) si $f \sim g$, alors $\lambda_f(\sigma) = \lambda_g(\sigma)$ sur $[0, \infty)$;

3) si p.p sur E $|f| > |g|$, alors $\lambda_f(\sigma) \geq \lambda_g(\sigma)$, $\forall \sigma \in [0, \infty)$;

4) $\lambda_f(0) = mesE_1$, oú $E_1 = \{x \in E,\ f(x) \neq 0\}$;

5) la fonction λ_f est une fonction décroissante sur $[0, \infty)$;

6) $\lim\limits_{\sigma \to \infty} \lambda_f(\sigma) = 0$;

7) $\forall \sigma \in (0, \|f\|_{L_\infty(E)}$, $\lambda_f(\sigma) > 0$;

8) si $\|f\|_{L_\infty(E)} < \infty$, alors $\forall \sigma \in [0, \|f\|_{L_\infty(E)})$, $\lambda_f(\sigma) = 0$;

9) la fonction λ_f est continue à droite sur $[0, \infty)$.

Preuve.

1) $\lambda_f(\sigma) = \lambda_{|f|}(\sigma)$.

Découle directement de la définition.

2) Soient $E = (0, \infty)$, $\sigma \in [0, \infty[$ et $g \sim f$, $g \sim f \Leftrightarrow (g \neq f$ sur $E_1 \subset E$, tels que $mes\,\{E_1\} = 0)$ et $(g = f$ sur $E/E_1 = E_2)$, tel que $E = E_1 \cup E_2$.

$$\begin{aligned}
\lambda_g(\sigma) &= mes\,\{x \in E : |g(x)| > \sigma\} \\
&= mes\,\{x \in E_1 : |g(x)| > \sigma\} + mes\,\{x \in E_2 : |g(x)| > \sigma\} \\
&= mes\,\{x \in E_2 : |g(x)| > \sigma\} \\
&= mes\,\{x \in E_2 : |f(x)| > \sigma\} \\
&= mes\,\{x \in E_1 : |f(x)| > \sigma\} + mes\,\{x \in E_2 : |f(x)| > \sigma\} \\
&= mes\,\{x \in E : |f(x)| > \sigma\} \\
&= \lambda_f(\sigma).
\end{aligned}$$

Donc

$$\lambda_f(\sigma) = \lambda_g(\sigma).$$

3) On pose:

$$\lambda_f(\sigma) = mes\{x \in E : |f(x)| > \sigma\} = mes\{E_1\},$$
$$\lambda_g(\sigma) = mes\{x \in E : |g(x)| > \sigma\} = mes\{E_2\}.$$

Donc

$$|g(x)| > \sigma \Rightarrow |f(x)| > \sigma.$$

Alors si

$$\begin{aligned}\{x \in E_2 \Rightarrow x \in E_1\} &\Rightarrow E_2 \subset E_1 \\ &\Rightarrow mes\ \{E_2\} \leq mes\ \{E_1\} \\ &\Rightarrow \lambda_g(\sigma) \leq \lambda_f(\sigma).\end{aligned}$$

4) On utilise la définition.

5) On pose $\forall \sigma \geq 0$, $E_\sigma = \{x \in E \ \ |f(x)| > \sigma\}$, alors $\lambda_f(\sigma) = mesE_\sigma$.

Si $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \infty$, donc $E_{\sigma_2} \subset E_{\sigma_1}$, $mesE_{\sigma_2} \leq mesE_{\sigma_1}$ et $\lambda_f(\sigma_2) \leq \lambda_f(\sigma_1)$.

Exercices.

Prouver les propriétés 6), 7), 8) et 9).

Théorèm 0.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E ensemble mesurable, f est une fonction mesurable sur E, alors si:*

i) $1 < p < \infty$ *on a*

$$||f||_{L_{P(E)}} = \left(p \int_0^\infty \sigma^{p-1} \lambda_f(\sigma) d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} = \left(-\int_0^\infty \sigma^p d\lambda_f(\sigma)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

ii) *Si $p = \infty$ on a*

$$||f||_{L_\infty} = \inf\{\sigma : \ \lambda_f(\sigma) = 0\}. \tag{3}$$

iii) *Si $p = 1$ on a*

$$||f||_{L_{1(E)}} = ||\lambda_f(\sigma)||_{L_{1(E)}}. \tag{4}$$

Preuve.

(i) Pour $1 < p < \infty$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sigma^{p-1}\lambda_f(\sigma)\,d\sigma &= \int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma}\lambda_f(\sigma)\,d\sigma\\ &= \int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma}\left(\int_{\{x\,:|f|>\sigma\}} d\mu\right)d\sigma\\ &= \int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma}\left(\int_E 1_{\{x\,:|f|>\sigma\}}\,d\mu\right)d\sigma,\end{aligned}$$

d'aprés le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma}\int_{\mathbb{E}} 1_{\{x\,:|f|>\sigma\}}\,d\mu d\sigma &= \int_{\mathbb{E}}\left(\int_0^{|f(x)|}\frac{\sigma^p}{\sigma}\,d\sigma\right)d\mu \qquad (*)\\ &= \int_E \frac{1}{p}|f(x)|^p\,dx\\ &= \frac{1}{p}\int_E |f(x)|^p\,dx\\ &= \frac{1}{p}\|f\|_{L_p}^p.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\|f\|_{L_p}^p &= \int_0^\infty \sigma^p\lambda_f(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sigma}\\ \|f\|_{L_p}^p &= p\int_0^\infty \sigma^p\lambda_f(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sigma}\\ \|f\|_{L_p} &= \left(p\int_0^\infty \sigma^p\lambda_f(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

(ii) Pour $p = \infty$ on a par définition:

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf\{\sigma \geq 0,\ mes\{x \in E :\ |f(x)| > \sigma\} = 0\}$$

et d'aprés la définition de $\lambda_f(\sigma)$,

$$\|f\|_{L_\infty} \;=\; \inf\{\sigma\ :\ \lambda_f(\sigma) = 0\}.$$

(iii) On remplace dans (2) $p = 1$ on obtient:

$$\|f\|_{L_{1(E)}} = \int_0^\infty \lambda_f(\sigma)d\sigma = \|\lambda_f(\sigma)\|_{L_{1(E)}}.$$

Remark 0.1. *Dans (2), la 2ème égalité à droite sera ultérieurement prouvée.*

Exercices.

Exercice 1. Prouver l′égalité (*) dans la preuve du Théorème en utilisant le Théorème de Fubini.

Exercice 2. Soient $E \subset \mathbb{R}^n$, E un ensemble mesurable, $mesE < \infty$ et $f : E \to \mathbb{C}$, une fonction mesurable. Alors $\forall \sigma \in (0, \infty)$,

$$\lambda_f(\sigma + 0) - \lambda_f(\sigma - 0) = \lambda_f(\sigma) - \lambda_f(\sigma - 0) = mes\{x \in E \ : \ |f(x)| = \sigma\}.$$

Lemma 0.1. *Soient $E \subset \mathbb{R}^n$, E un ensemble mesurable, f et f_k $k \in (\mathbb{N})$ des fonctions mesurables non-nègative sur E et pour presque tous les $x \in E$*

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x, \lim_{k\to\infty})f_k(x) = f(x). \tag{5}$$

Alors $\forall \sigma \in [0, \infty)$

$$\lambda_{f_k}(\sigma) \leq \lambda_{f_{k+1}}(\sigma) \leq \lambda_f(\sigma), \ \lim_{k\to\infty} \lambda_{f_k}(\sigma) = \lambda_f(\sigma). \tag{6}$$

Ce lemme est necessaire pour la preuve du théorème qui suivra.

La preuve du lemme précédent, sera donnée dans le prochain cours.

N. B. La résolution des exercices proposés ci-dessus, est necessaire pour bien comprendre les notions de fonctions de distribution et de réarrangement.