Université Ibn Khaldoun. Tiaret. Faculté M.I. Département de Mathématiques

Notes de cours d'analyse fonctionnelle

ZIANE Mohamed

Préface

Ce manuscrit est la rédaction d'un cours de Master d'analyse fonctionnelle actuellement enseigné à l'université Ibn-Khaldoun de Tiaret. Il sera consacré principalement à étudier les quatres théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle (abstaite).

Table des matières

Chapitre 1

Espaces normés

Chapitre 2

Les théorèmes de Hahn-Banach

C'est un théorème très respectable de l'analyse fonctionnelle. Il admet deux formes. La première, dite analytique, assure le prolongement avec conservation de la norme d'une forme linéaire continue dès lors qu'on connaît sur un sous-espace vectoriel. La deuxième forme, dite géométrique, permet de séperer strictement un ensemble convexe fermé d'un ensemble compact fermé par un hyperplan fermé.

2.1 Rappels sur les applications linéaires bornées

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces normés. Un opérateur linéaire n'est autre qu'une application $T : D(T) \subset E \to F$ linéaire, où $D(T)$ désigne le domaine de T, qui est un sous-espace vectoriel de E. On note par : $G(T)$, le graphe de T, qui est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ défini par $G(T) = \{(x, Tx);\ x \in D(T)\}$. $N(T)$, le noyau de T défini par $N(T) = \{x \in D(T),\ Tx = 0\} \subset F$. L'image de T, $R(T) = \{y = Tx,\ x \in D(T)\} \subset E$.

Définition 2.1 *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés. On dit qu'une application linéaire $T : E \to F$ est bornée s'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

Un critère simple pour la continuité des applications linéaires est le suivant

Proposition 2.1 *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés. Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) T est continue.

(2) T est continue en 0.

(3) T est bornée.

Démonstration: Il est clair que (1) $\Rightarrow$ (2). Montrons que (2) $\Rightarrow$ (3).
Fixons $\epsilon = 1$, d'après la définition de la continuité, il existe donc $\delta > 0$ telle que $\|x\| \leq \delta$ on ait $\|Tx\| \leq 1$.

Soit $y \in E$ (avec $y \neq 0$), on a

$$\left\| T\left(\frac{\delta y}{\|y\|}\right) \right\| \leq 1.$$

Par linéarité

$$\|Ty\| \leq \frac{1}{\delta}\|y\|.$$

La dernière inégalité est encore vraie pour $y = 0$. D'où (3).

Il reste à montrer (3) $\Rightarrow$ (1). Soit $M > 0$ de sorte que

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Alors

$$\|Tx - Ty\| \leq \|T(x-y)\| \leq M\|x-y\|.$$

Par conséquent, T est liptschizienne, en particulier continue (uniformément). ∎

On note par $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires bornées (i.e. l'espace des opérateurs linéaires continus) de E dans F. Munissons l'espace $\mathscr{L}(E,F)$ de la norme

$$\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \inf\{M \in \mathbb{R} : \ \|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \text{pour tout } x \in E\}.$$

Proposition 2.2 *Soient E et F deux espaces normés et $T : E \to F$ une application linéaire bornée. Alors*

$$\|T\| = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Démonstration: Soit

$$M = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Donc $\|Tx\| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$, par conséquent $M \geq \|Tx\|$. réciproquement, par définition nous avons

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Il vient que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$$

pour tout $x \in E$, alors $\|T\| \leq M$. Ce qui montre la première égalité.

Pour montrer

$$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

il suffit de remarquer que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|.$$

∎

Proposition 2.3 *Soit E un espace normé, si F est un espace de Banach, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi un espace de Banach.*

Démonstration: Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(E,F)$. Nous avons

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N \ \Rightarrow\ \|T_n - T_m\| \leq \epsilon.$$

Fixons $x \in E$, on a

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N \ \Rightarrow\ \|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|.$$

Posons $\epsilon = \dfrac{\epsilon'}{\|x\|}$, donc on a montré

$$\forall \epsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N \ \Rightarrow\ \|T_n x - T_m x\| \leq \epsilon'.$$

La suite $(T_n x)_{n\geq 0}$est de Cauchy dans F. Comme F est de Banach, on a

$$Tx = \lim T_n x.$$

Montrons maintenant que : $\mathscr{L}(E,F) \ni T = \lim T_n$. La linéarité de T découle immédiatement de la linéarité de la limite. D'autre part, on a

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N \ \Rightarrow\ \|T_n - T_m\| \leq \epsilon \|x\|.$$

Fixons m, on fait tendre n vers $+\infty$, il vient

$$\|(T - T_m)x\| = \|Tx - T_m x\| \leq \epsilon \|x\|, \qquad \text{pour tout } x \in E \text{ avec } m \geq N.$$

En particilier, il résulte que $T - T_m \in \mathscr{L}(E,F)$, par conséquent $(T - T_m) + T_m \in \mathscr{L}(E,F)$ et

$$\|T - T_m\| \leq \epsilon, \qquad \text{pour } m \geq N.$$

D'où $T_m \to T$ dans $\mathscr{L}(E,F)$. ■

2.2 La forme analytique du théorème de Hahn-Banach

Le résultat suivant est de nature algébrique et il ne fait appel à aucune structure topologique sur l'espace vectoriel considéré.

Théorème 2.1 *[1] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \textit{et} \quad p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x, y \in E,\ \forall \lambda > 0. \tag{2.1}$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G. \tag{2.2}$$

Alors, il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, i.e.

$$g(x) = f(x), \quad x \in G$$

et telle que

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in E. \tag{2.3}$$

Voici les premières conséquences des théorèmes de Hahn-Banach lorsque E est un **espace vectoriel normé**.

Corollaire 2.1 *Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue. Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et tel que*

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

Démonstration: Pour tout $x \in G$, on pose $p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|$. Alors p est une semi-norme [1]. L'application g est par hypothèse linéaire et continue, donc

$$g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\|_{G'}\|x\| = p(x), \quad x \in G.$$

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire f sur E prolongeant g de sorte que

$$f(x) \leq p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

De plus,

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = \|g\|_{G'}\|x\| = p(x), \quad \forall x \in E.$$

Par conséquent

$$|f(x)| \leq p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Donc f est continue et on a

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| \leq \|g\|_{G'}. \tag{2.4}$$

D'autre part, puisque $f\Big|_G = g$ [2], nous avons

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} |f(x)| \geq \sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|\leq 1}} |g(x)| = \|g\|_{G'}. \tag{2.5}$$

De (2.4) et (2.5) il vient que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

■

Corollaire 2.2 *Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tel que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \qquad \text{et} \qquad \langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2.$$

1. i.e. satisfait (2.1).
2. la restriction de f sur G est égal à g.

Démonstration: Soit $x_0 \in E$ et $G = \mathbb{R}x_0 := \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$ le sous-espace vectoriel engendré par x_0. On définit

$$g(tx_0) = t\|x_0\|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors, nous avons

$$\|g\|_{G'} = \sup_{t\neq 0} \frac{|g(tx_0)|}{\|tx_0\|} = \sup_{t\neq 0} \frac{|t|\|x_0\|^2}{|t|\|x_0\|} = \|x_0\|.$$

L'application g étant linéaire, il vient que $g \in G'$. D'après le corollaire 2.1, il existe $f_0 \in E'$ qui prolonge g telle que

$$\|f_0\|_{E'} = \|g\|_{G'} = \|x_0\|.$$

De plus, comme $x_0 \in G$, on a

$$\langle f_0, x_0\rangle = \langle g, x_0\rangle = \|x_0\|^2.$$

■

Remarque 2.1 *Le résultat du corollaire précédent signifie en particulier que si l'espace E n'est pas réduit à* $\{0\}$*, son dual topologique* E' *est riche de formes (fonctionnelles) linéaires continues (non triviales!).*

Le corollaire suivant permet de calculer la norme d'un élément d'un espace vectoriel normé par dualité.

Corollaire 2.3 *Pour tout* $x \in E$*, on a*

$$\|x\| = \sup_{\substack{x\in E' \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \max_{\substack{x\in E' \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle|. \tag{2.6}$$

Démonstration: Si $x = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $x \neq 0$. Il est clair que

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x\| \Rightarrow \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|.$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.2, il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = \|x\|$ et $\langle f_0, x\rangle = \|x\|^2$. On pose $f_1 = \dfrac{f_0}{\|x\|}$ de sorte que $\|f_1\| = 1$ et $\langle f_1, x\rangle = \|x\|$.[3] ■

2.3 La forme géométrique du théorème de Hahn-Banach

3. i.e le "Sup" dans l'expression (2.6) est atteint sur la sphère.

Chapitre 3

Conséquences du théorème de Baire

Le lemme suivant joue un rôle essentiel puisqu'il permet d'obtenir un certain nombre de corollaires en particulier, le théorème de Banach-Steinhaus, [1] théorème de l'application ouverte (qui donne lieu au théorème du graphe fermé).

Lemme 3.1 [1] (Baire) [2] *Soit X un espace métrique complet non vide. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés telle que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Alors il existe n_0 tel que $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$.*

3.1 Le théorème de Banach-Steinhaus

Le théorème de Banach-Steinhaus dit que si une famille d'opérateurs linéaires est localement bornée, alors elle est bornée en norme.

Théorème 3.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty, \quad \forall x \in E. \tag{3.1}$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty. \tag{3.2}$$

Autrement dit, s'il existe, pour chaque $x \in E$ un nombre positif $C_x < \infty$ tel que

$$\|T_i x\| \leq C_x \|x\|, \quad \forall i \in I,$$

alors il existe un nombre positif $C < \infty$ tel que :

$$\|T_i x\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in E, \forall i \in I.$$

Notons que la réciproque du théorème 3.1 est triviale, en effet :

$$\forall x \in E; \forall i \in I : \|T_i x\| \leq \|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} \|x\|.$$

1. Dans la littérature américaine, il est souvent appelé du nom "Principle of Uniform Boundedness" ce qui exprime bien le contenu du résultat : à partir d'une estimation ponctuelle on obtient une estimation uniforme.
2. Le lecteur qui désire en savoir plus sur le "langages des catégories" (dû à Baire) pourra voir [2, 4].

Démonstration: Pour chaque entier $n \geq 1$ on pose

$$X_n = \{x \in E;\ \forall i \in I : \|T_i x\| \leq n\}$$

c'est un fermé, puisque $X_n = \bigcap_{i \in I} G_i^{-1}[0, n]$ avec G_i est la fonction continue donnée par $G_i = \|\cdot\| \circ T_i$.

Grâce à (3.1) on a :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E.$$

En effet : L'inclusion $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset E$ est triviale. Soit donc $x \in E$, l'hypothèse (estimation ponctuelle (3.1)) entraine que $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Comme E est un espace de Banach. D'après le lemme 3.1 (de Baire) : $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$ pour un certain $n_0 > 0$.

i.e. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in E$, $\exists r > 0$ tels que

$$B_E(x_0, r) \subset X_{n_0}.$$

Soit maintenant $z \in E$ avec $z \in B_E(0,1)$, par conséquent, $x = x_0 + rz \in B_E(x_0, r)$.

On a :

$$\begin{aligned} \|T_i x\| = \|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0, \quad & \forall i \in I, \forall z \in B_E(0,1), \\ \Longrightarrow \underbrace{\|T_i x_0 + r T_i z\|}_{r\|T_i z\| - \|T_i x_0\| \leq} \leq n_0 & \end{aligned}$$

Il vient que

$$\begin{aligned} & r\|T_i z\| \leq n_0 + \|T_i x_0\| \\ \Rightarrow & \|T_i z\| \leq \frac{1}{r}\Big(n_0 + \|T_i x_0\|\Big),\ \forall z \in B_E(0,1) \end{aligned}$$

On sait que $x_0 \in X_{n_0}$ donc, $\|T_i x_0\| \leq n_0$, $\forall i \in I$.

Alors

$$\|T_i z\| \leq \frac{2n_0}{r}, \qquad \forall i \in I,\ \forall z \in B_E(0,1).$$

$$\sup_{z \in B_E(0,1)} \|T_i z\| \leq \frac{2n_0}{r}, \qquad \forall i \in I.$$

D'où

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty.$$

■

Remarque 3.1 *(1) La condition E est un espace de Banach est nécessaire. Le théorème 3.1 n'est pas vrai, en général, pour un espace normé non complet (cf exemple 3.1).*

(2) On n'utilise pas la complétude de F dans la démonstration du théorème 3.1, mais l'énoncé est plus simple comme ça.

Exemple 3.1 *Considérons l'espace* $c_{00} = \{(x_n);\, x_n \in \mathbb{R} \,/\, \exists p \geq 1,\ x_n = 0, \forall n \geq p\}$, *avec la norme* $\|(x_n)\| = \sup_n |x_n|$.

Soit

$$L_n : \begin{array}{l} c_{00} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_k)_k \longmapsto n x_n. \end{array}$$

Pour $(x_k) \in c_{00}$, *alors :* $L_n((x_k)_k) = n x_n,\ \forall n \geq p$.

L'ensemble $\{L_n((x_k)_k) \ :\ n \in \mathbb{N}\}$ *est ainsi borné. D'après le théoème de Banach-Steinhaus l'ensemble*

$$\{\|L_n\| : n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{est borné.}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|L_n\| &= \sup_{\|(x_k)\|=1} \|L_n((x_k))\| \\ &= \sup_{\|(x_k)\|=1} |n x_n| \\ &= n. \end{aligned}$$

L_n *n'est pas borné, ce qui prouve que* c_{00} *n'est pas complet.*

Le corollaire suivant établit la continuité d'une limite de suite d'opérateurs linéaires continus.

Corollaire 3.1 *Soient E un espace de Banach, F un espace normé. Soit* (T_n) *une suite d'opérateurs linéaires et continus de E dans F tels que pour chaque* $x \in E$, $T_n x$ *converge quand* $n \to \infty$ *vers une limite notée* Tx.

Alors on a

(a) $\sup_n \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty$.

(b) $T \in \mathscr{L}(E,F)$.

(c) $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}$.

Démonstration: On peut facilement vérifier que T est linéaire.
Pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)$ est convergente, donc bornée. Par le théorème 3.1, il existe $c > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\|T_n\| \leq c.$$

Alors, $\forall x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\|T_n x\| \leq c\|x\|$.

A la limite on obtient

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

D'où (b).

D'autre part, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| &= \liminf_{n\to\infty} \|T_n x\| \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \|x\| \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \|x\| \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

■

Remarques 3.1 *1) Attention : on ne dit pas que T_n converge vers T dans l'espace $\mathscr{L}(E,F)$ (i.e. au sens de la topologie des opérateurs).*

2) Le corollaire 3.1 est très souvent utilisé pour montrer qu'une application linéaire est continue. D'ailleurs toutes les applications linéaires usuelles s'obtiennent comme limite simple d'applications linéaires continues.

Corollaire 3.2 *Soit G un espace normé et soit B un sous-ensemble de G. On suppose que : pour tout $f \in G'$, l'ensemble $f(B) = \bigcup_{x\in B} \langle f, b\rangle$ est borné (dans $\mathbb{R}$).*

Alors

B est borné.

Démonstration: On applique le théorème 3.1 avec $E = G'$ (qui est un espace de Banach), $F = \mathbb{R}$ et $T = B$. Pour chaque $b \in B$ on pose

$$T_b(f) = \langle f, b\rangle = f(b), \quad f \in E = G',$$

de sorte que

$$\sup_{b\in B} |T_b(f)| < \infty, \quad f \in E.$$

T_b étant linéaire et continue pour chaque $b \in B$, soient $f, g \in G'$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}T_b(f+\lambda g) = (f+\lambda g)(b) f(b) + \lambda g(b) \\ T_b(f) + \lambda T_b(g).\end{aligned}$$

D'autre part, pour chaque $b \in B$ nous avons

$$\|T_b(f)\| = \|f(b)\| \leq \|b\| \|f\|.$$

La famille $\{T_b(f)\}_{b\in B}$ est bornée pour tout $f \in G'$ par hypothèse.

En vertu du théorème de Banach-Steinhaus, il existe une constante $c > 0$ (indépendante de f) telle que

$$|\langle f, b\rangle| = |f(b)| \leq c\|f\|, \quad \forall f \in G', \forall b \in B.$$

Par conséquent

$$\|b\| \leq c, \quad \forall b \in B$$

(voir le corollaire 2.3). ■

Remarque 3.2 *La conclusion du corollaire 3.2 exprime le fait que "faiblement borné" entraine "fortement borné".*

On a un énoncé "dual" du corollaire 3.2.

Corollaire 3.3 *Soit G un espace de Banach et soit B' un sous-ensemble de G'. On suppose que : pour tout $x \in G$ l'ensemble $\langle B', x\rangle = \bigcup_{f\in B'} \langle f, x\rangle$ est borné (dans $\mathbb{R}$).*

Alors

$$B' \text{ est borné.}$$

Démonstration: On applique le théorème 3.1 avec $E = G$, $F = \mathbb{R}$ et $I = B'$. Pour chaque $b \in B'$, on pose

$$T_b(x) = \langle b, x\rangle, \quad x \in G = E,$$

et on conclut qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|\langle b, x\rangle| \le c\|x\|, \quad \forall b \in B', \forall x \in G.$$

Donc (par définition de la norme dual)

$$\|b\| \le c \quad \forall b \in B'.$$

■

Le corolaire qui suit donne une conséquence intéressante du théorème 3.1.

Corollaire 3.4 [4] (Principe de condensation des singularités). *Soient E un espace de Banach, F un espace normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans F avec*

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \infty.$$

Alors il existe $x \in E$ tel que

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| = \infty.$$

3.2 Théorème de l'application ouverte

Le résultat fondamental suivant est dû à Banach-Schauder en 1930.

Théorème 3.2 *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur linéaire continu et surjectif. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c). \tag{3.3}$$

La propriété (3.3) signifie en particulier que T est une application ouverte (i.e. T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F). En effet : Soit U un ouvert de E. Montrons que $T(U)$ est un ouvert de F.

Soit $y_0 \in T(U)$ tel que $y_0 = Tx_0$ avec $x_0 \in U$. Comme U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subset U$ i.e. $x_0 + B_E(0, r) \subset U$. On a alors

$$y_0 + T(B_E(0, r)) \subset T(U).$$

Or, d'après (3.3), nous avons

$$B_F(0, cr) \subset T(B_E(0, r)).$$

Par conséquent

$$B_F(0, cr) \subset T(U).$$

■

Du fait que l'inverse d'une application ouverte est continue, on déduit immédiatement du théorème 3.2 le corollaire suivant

Corollaire 3.5 (théorème d'isomorphisme de Banach). *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur linéaire continu et bijectif. Alors $T^{-1} : F \to E$ est continu.*

Démonstration: La relation (3.3) exprime que :

$$\text{Pour tout } x \in E \text{ tel que } \|Tx\| < c, \text{ alors } \|x\| < 1.$$

Soit $y \in F \setminus \{0\}$, alors $\dfrac{cy}{\|y\|} \in B_F(0, c)$, donc il existe $\|z\| < 1$ tel que $\dfrac{cy}{\|y\|} = T(z)$. Soit $x = \dfrac{\|y\|}{c} z$, alors on a : $Tx = y$ et $\|x\| \le \dfrac{1}{c}\|y\|$. Par conséquent, il vient

$$\|x\| \le \frac{1}{c}\|Tx\|, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

L'opérateur T étant bijectif, la linéarité de T^{-1} est triviale. montrons qu'alors que T^{-1} est borné. Pour chaque $y \in F$ on a

$$\|T^{-1}(\underbrace{Tx}_{y})\| = \|x\| \le \frac{1}{c}\|\underbrace{Tx}_{y}\|.$$

D'où T^{-1} est continu. ■

Remarque 3.3 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On suppose que E muni de chacune des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach. On suppose de plus qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|x\|_2 \le C\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2, \quad \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont équivalentes. Il suffit d'appliquer le théorème d'isomorphisme de Banach avec $E = (E, \|\cdot\|_1)$, $F = (E, \|\cdot\|_2)$ et $T = Id$.

Démonstration du théorème 3.2. – La démonstration se fait en deux étapes :
Première étape. – Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire surjectif. Alors il existe $c > 0$ tel que

$$\overline{T(B(0,1))} \supset B(0,2c). \tag{3.4}$$

Démonstration: – On pose $X_n = n\overline{T(B(0,1))}$; comme T est surjectif on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = F$ et grâce au lemme de Baire on sait qu'il existe n_0 tel que $\mathring{X}_{n_0} \neq \emptyset$. Il en résulte que

$$\overset{\circ}{\overbrace{\overline{T(B(0,1))}}} \neq \emptyset.$$

Soient $c > 0$ et $y_0 \in F$ tels que

$$B(y_0, 4c) \subset \overline{T(B(0,1))}. \tag{3.5}$$

En particulier $y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$ et par symétrie on a

$$-y_0 \in \overline{T(B(0,1))}. \tag{3.6}$$

Par addition de (3.5) et (3.6) on obtient

$$B(0,4c) \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))}.$$

Enfin, comme $\overline{T(B(0,1))}$ est convexe on a

$$\overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} = 2\overline{T(B(0,1))}.$$

D'où (3.4). ■
Deuxième étape. – Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire continu qui vérifie (3.4). Alors on a

$$T(B(0,1)) \supset B(0,c). \tag{3.7}$$

Démonstration: – Fixons $y \in F$ avec $\|y\| < c$. On cherche $x \in E$ tel que

$$\|x\| < 1 \quad \text{et} \quad Tx = y.$$

D'apès (3.4) on sait que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists z \in E \ \text{ avec } \ \|z\| < \frac{1}{2} \ \text{ et } \ \|y - Tz\| < \epsilon. \tag{3.8}$$

On choisit $\epsilon = \frac{c}{2}$ et on obtient un $z_1 \in E$ avec

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|y - Tz_1\| < \frac{c}{2}.$$

Appliquant le même procédé avec $y - Tz_1$ (au lieu de y) et avec $\epsilon = \frac{c}{2}$, on obtient un $z_2 \in E$ tel que

$$\|z_2\| < \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \|(y - Tz_1) - Tz_2\| < \frac{c}{4}.$$

Ainsi de suite, on construit par récurrence une suite (z_n) telle que

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \|y - T(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}, \quad \forall n.$$

Donc la suite $x_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ est de Cauchy. Soit $x_n \to x$; on a $\|x\| < 1$ et $y = Tx$ puisque T est continue. ■

3.3 Théorème du graphe fermé

Définition 3.1 *Soient X et Y deux espaces normés. On dit qu'un opérateur $L : X \to Y$ est fermé si son graphe, $G(L)$* [3]*, est fermé dans $X \times Y$.*

Remarques 3.2 **[1]** – *Pour démontrer qu'un opérateur L est fermé on procède en général de la manière suivante. On prend une suite (x_n) dans $D(L)$ (le domaine de L) telle que $x_n \to x$ dans X et $Lx_n \to y$ dans Y. Il s'agit ensuite de vérifier que*

(a) $x \in D(L)$,

(b) $y = Lx$.

[2] – *On verra que toute application linéaire continue est fermé, il existe dans la pratique des exemples d'opérateurs linéaires qui ne sont pas continus mais au moins sont fermés. Si X et Y sont des espaces de Banach, les deux concepts sont équivalents (c'est bien le théorème du graphe fermé).*

Théorème 3.3 *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de T, $G(T)$, est fermé dans $E \times F$. Alors*

T est continu.

La réciproque du théorème 3.3 est vraie puisque toute application continue (linéaire ou non linéaire) a un graphe fermé. En effet : Supposons que l'application T est continue, nous avons

$$\begin{aligned} G(T) &= \{(x, y) \in E \times F : \; y = Tx\}, \\ &= \{(x, y) \in E \times F : \; \|y - Tx\| = 0\}, \\ &= \Phi^{-1}(\{0\}). \end{aligned}$$

L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & E \times F \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto \|y - Tx\| \end{aligned}$$

est donc continue. D'où $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.

3. Observons que si L est linéaire, le graphe de L, $G(L)$, est un sous-espace vectoriel de $X \times Y$.

Démonstration: On applique la remarque 3.3. On considère sur E les deux normes

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F \,(^4) \qquad \text{et} \qquad \|x\|_2 = \|x\|_E.$$

Comme $G(T)$ est fermé, E muni de la norme du graphe est un espace de Banach. En effet, soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Puisque $\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_1$, nous avons

$$\begin{cases} (x_n)_n \text{ est une suite de Cauchy dans } (E, \|\cdot\|_E), \\ (Tx_n)_n \text{ est une suite de Cauchy dans } (F, \|\cdot\|_F). \end{cases}$$

E et F étant deux espaces de Banach, donc $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$ i.e. $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ dans $E \times F$. Comme T est fermé, on a $(x, y) \in G(T)$. Alors $y = Tx$.
D'autre part, $\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_1$. Par conséquent ces deux normes sont équivalentes : il existe donc une constante $c > 0$ telle que

$$\|x\|_1 \le c\|x\|_2, \quad \forall x \in E.$$

Alors

$$\|Tx\|_F \le \|x\|_E + \|Tx\|_F = \|x\|_1 \le c\|x\|_2 = c\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

D'où

$$\|Tx\|_F \le c\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

■

Un critère de continuité des applications linéaire est le suivant

Corollaire 3.6 *Soient E et F deux espaces de Banach et $L : E \to F$ une application linéaire. On suppose que pour toute suite $(x_n)_n$ d'élément de E,*

$$\begin{cases} x_n \to 0 \\ \exists y \in F,\ L(x_n) \to y, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y = 0.$$

Alors, l'application linéaire L est continue.

Démonstration: Montrons que $G(T)$ est fermé dans $E \times F$. Soit $(a, b) \in \overline{G(L)}$, il existe donc une suite $(a_n)_n$ d'élément de E tels que $x_n = a_n - a \to 0$ et $L(a_n) \to b$. On a $L(a_n - a) \to y = b - L(a)$, alors $y = 0$ i.e. $(a, b) \in G(L)$. ■

4. Cette norme est appelée la norme du graphe.

Bibliographie

[1] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Dunod. 1999.

[2] N. El Hage Hassan, *Topologie et espaces normés*, Dunod. 2011.

[3] H. Queffélec, M. Mbekhta et J. Charles. *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : Rappels de cours et exercices corrigés*. Dunod. 2010.

[4] J.C. Robinson, *An Introduction to Functional Analysis*. Cambridge University Press. 2020.